Г.А.Медведев

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ ЭКОНОМИКИ

Учебное пособие

Часть 1

Медведев Г.А. Математические основы финансовой экономики [Электронный ресурс]: Учебное пособие: Часть 1. — Электрон. текст. дан. (3,5 Мб). — Мн.: Научно-методический центр “Электронная книга БГУ”, 2003. — Режим доступа:
http://anubis.bsu.by/publications/elresources/AppliedMathematics/medvedev2.pdf . — Электрон. версия печ. публикации, 2003. — PDF формат, версия 1.4 . — Систем. требования: Adobe Acrobat 5.0 и выше.

МИНСК

«Электронная книга БГУ»

2003

www.elbook.bsu.by
elbook@bsu.by

ПРЕДИСЛОВИЕ

Финансовая экономика является новым направлением, возникшим из потребностей участников финансовых рынков. Как и любое современное научное направление, финансовая экономика строится на базе, требующей хороших математических знаний, особенно в области теории вероятностей и случайных процессов.

Настоящее учебное пособие подготовлено, чтобы помочь студентам освоить курсы лекций «Математические основы финансовой экономики» и «Мартингалы и ценные бумаги», обучение которым предусматривается учебным планом по специальности «Актуарная математика». Автор в течение нескольких лет читает эти курсы для студентов факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета (ФПМИ БГУ).

На русском языке до сих пор практически нет учебников и других книг по стохастической финансовой математике, поэтому автор поставил перед собой цель познакомить читателей с достижениями в этой области в основном иностранных авторов. Литературные источники, по которым составлено учебное пособие, образуют основу современной математической теории финансовой экономики. Они упомянуты во введении и приведены в библиографическом списке как основная литература. В списке дополнительной литературы содержатся либо книги, в которых описан математический аппарат, позволяющий понять математические детали излагаемого в учебном пособии материала, либо статьи, в которых подробно приводятся выводы конкретных результатов, упомянутых в пособии.

Автор надеется, что учебное пособие вызовет интерес не только у студентов, изучающих стохастические методы финансовой математики, но и у специалистов, которые по роду своей работы сталкиваются с анализом финансовых решений, и с благодарностью примет все замечания и предложения читателей.

Доктор физико-математических наук,
профессор *Г. А. Медведев.*

ОСНОВНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

НППЛ – непрерывный справа и имеющий предел слева (процесс)
ПФМ – производящая функция моментов
ФП – финансовая производная
ЦБ – ценная бумага
CAPM – модель определения цен активов, основанная на рассмотрении капитала (*Capital Asset Pricing Model*)
VF – класс процессов с конечной вариацией (*Finite Variation*)
$\mathrm{erf}(x)$ – интеграл ошибок
$E[X]$ – математическое ожидание случайной величины (СВ) X
$E[X|Y]$ – условное математическое ожидание СВ X при фиксированном значении СВ Y
$M_X(t)$ – ПФМ СВ X
$N(\mu, \sigma^2)$ – нормальное (гауссово) распределение СВ с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2
$\mathrm{prob}[A]$ – вероятность события A
$\mathrm{prob}[A|B]$ – условная вероятность события A при условии, что событие B произошло
$\mathrm{var}[X]$ – дисперсия СВ X
$\mathrm{var}[X|Y]$ – условная дисперсия СВ X при фиксированном значении СВ Y
$\Phi(x)$ – функция стандартного нормального распределения с нулевым средним и единичной дисперсией
Ф – множество всех допустимых торговых стратегий.

$$f_1(x, y) \equiv \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad f_2(x, y) \equiv \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad f_{12}(x, y) \equiv \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$$

ВВЕДЕНИЕ

Финансовая экономика – быстро развивающаяся отрасль рыночной экономики. Способствует этому расширение и усложнение финансовых рынков. Используемые на рынках финансовые инструменты становятся более разнообразными и порождают довольно изощренные потоки платежей. Ситуация усложняется тем, что изменение процентных ставок и доходностей на рынках стохастические, а математические модели этих изменений – случайные процессы. Поэтому основная задача участников финансовых рынков – определение цен финансовых инструментов – может быть решена только с привлечением вероятностных методов. При этом построение математической модели финансового рынка и анализ процессов, которые там происходят, требуют использования математических методов на достаточно строгом уровне. Настоящее учебное пособие предназначено для того, чтобы познакомить читателей с основами этих методов.

Как некоторый факт, подтверждающий важность проблематики учебного пособия, отметим, что в 1997 г. американским математикам М. Шоулсу и Р. Мертону была присуждена Нобелевская премия «за разработку совершенно нового метода определения стоимости опционов», описанного в их знаменитых статьях F. Black, M. Scholes (1973) и R. Merton (1973). Результат этой разработки – формула стоимости опциона, которая в отличие от известных на то время формул, во-первых, основана только на наблюдаемых или оцениваемых рыночных показателях и, во-вторых, определяет стоимость опциона единственным образом, независимо от рыночных предпочтений инвесторов.

Прежде чем конкретно обсуждать особенности этой формулы, приведем некоторые исторические замечания. Первое математическое описание стохастического процесса, теперь называемого винеровским, или процессом броуновского движения, дано Л. Башелье (Bachelier) в докладе, представленном им Парижской академии в 1900 г. Предлагая этот процесс в качестве модели колебаний цены активов, он стремился теоретически вывести стоимости различных типов опционов и сравнить их с наблюдаемыми рыночными ценами опционов.

Таким образом, проблема определения стоимости опционов мотивировала самое первое исследование того, что мы теперь называем диффузионными процессами. Работа Башелье была, очевидно, неизвестна Эйнштейну и Винеру, когда они позже развивали математическую теорию броуновского движения. С современной точки зрения, и математика, и экономика Башелье были некорректны, так как не было никакого смысла в разработке теории определения стоимости в момент, когда она уже известна. Но Башелье решил ряд проблем правильно, и его работа заслуживает того, чтобы считать ее предвестником современной стохастической теории определения цен финансовых активов.

Одной из основных проблем современных финансов является определение стоимости потока доходов, порождаемого инвестициями в виде покупки активов. Главным результатом в этой области оказались теоремы Ф. Модиглиани и М. Миллера (Modigliani, Miller, 1958) о том, что на равновесном рынке пакеты финансовых исков, которые, по существу, эквивалентны, должны характеризоваться одинаковой ценой. Они признавали, что в отсутствие рыночных дефицитов эти иски были просто финансовыми инструментами для предложения альтернативных способов обладания одним и тем же экономическим потоком доходов. Как следствие, совокупная стоимость исков к доходам фирмы, например, должна быть независима от типов выпущенных активов. Модиглиани и Миллер считали, что финансовые инструменты, выпускаемые фирмой, охватывают поток доходов, т. е. полный пакет исков на фирму независимо от сложности эквивалентен простому равноценному иску на поток доходов.

Эта мысль стала центральной в более поздней статье Блэка и Шоулса, в которой была получена знаменитая модель определения цен опционов, зависящая только от наблюдаемых переменных. Результаты Блэка и Шоулса по определению цен опционов можно рассматривать несколькими способами как динамический аналог теории Модиглиани и Миллера. Хотя последующие исследования достигли большей общности и существенно различались по способам, смысл основного наблюдения Блэка и Шоулса остается: как в *статической*, так и в *динамической* постановке две вещи, которые можно считать эквивалентными, должны продаваться за одинаковую цену.

Одновременно с работой Модиглиани и Миллера над теоремами и несколько независимо от нее значительное продвижение сделали П. Самюэльсон (Samuelson, 1965) и другие авторы в определении стоимости опционов на акции, специализированных форм финансовых исков. Они заменили обычное (или арифметическое) броуновское движение Башелье геометрическим броуновским движением. Самым простым аргументом в пользу этой замены являлось то, что цены акции не могут быть отрицательными из-за ограниченной ответственности. При использовании геометрического броуновского движения как модели изменения цены акции разные авторы получали различные способы определения стоимости в зависимости от других принимаемых предположений. Однако эти теории, развитые между 1950 и 1970 г., содержали специально подобранные к рассматриваемому случаю элементы, которые даже у их создателей оставляли чувство неудовлетворенности, так как никаких способов численного определения таких элементов разработать невозможно.

Затем Блэк и Шоулс (1973) показали, что на идеализированном рынке инвесторы могут фактически дублировать поток платежей (или поток вознаграждения) опциона-колл, умело управляя портфелем, который содержит только акцию и облигацию. Так как владение этим портфелем полностью эквивалентно владению опционом-колл, рыночная стоимость составляющих его ценных бумаг в нулевой момент времени – это единственная рациональная стоимость опциона.

Блэк и Шоулс предполагают, что стоимость акции следует конкретному диффузионному процессу, который является геометрическим броуновским движением, и локально во времени акция и любой опцион, проданный на нее, полностью коррелированы и, будучи соединенными с занятой или арендованной позицией по безрисковой ставке, могут быть полностью взаимозаменяемыми. Таким образом, опцион локально воспроизводится безрисковыми облигациями и акцией, и знание стоимости акции позволяет найти стоимость опциона. Наиболее серьезным фактором в этих рассуждениях и в любой модели определения стоимости финансовых производных является точное описание стохастического процесса, моделирующего поведение основного актива. Оно задается характеристиками этого процесса, которые определяют точную природу эквивалентности между пакетами исков.

Теория Блэка – Шоулса определения цены опционов – вероятно, наиболее важный успех в теории финансовой экономики в последней четверти прошлого века. Она обобщена в различных направлениях путем применения разнообразных математических средств стохастического анализа и уравнений в частных производных. Блэк и Шоулс получали свои результаты с помощью интуитивных рассуждений, не привлекая строгого математического анализа. Р. Мертон (Merton, 1973) сделал это строго (см. гл. 2). При более слабых предположениях ему удалось получить более общую формулу определения стоимости опциона. Фундаментальное проникновение в развитие теории произведено Дж. Коксом и С. Россом (Cox, Ross, 1976). Они ввели понятие нейтрального к риску определения стоимости (см. § 9 гл. 2). Затем эта идея была разработана Дж. Харрисоном и Д. Крепсом (Harrison, Kreps, 1979) (см. гл. 3) и Дж. Харрисоном и С. Плиской (Harrison, Pliska, 1981) (см. гл. 4) в терминах эквивалентной мартингальной меры. Стало понятно, что отсутствие на финансовом рынке арбитража, по существу, идентично существованию эквивалентной мартингальной меры, и некоторые авторы называют этот факт *фундаментальной теоремой определения цены актива.*

Проблема определения эквивалентной мартингальной меры в явной форме непростая. Г. Гербер и Е. Шью (Gerber, Shiu, 1993) предложили делать это с помощью проверенного временем в актуарной науке метода преобразования Эсшера при предположении, что логарифм цены лежащего в основе актива управляется стохастическим процессом со стационарными и независимыми приращениями (см. гл. 6). Преобразование Эсшера индуцирует эквивалентную вероятностную меру процесса цены акции. Нейтральный к риску параметр Эсшера (который является единственным) определяется так, чтобы цена акции, дисконтированная при безрисковой процентной ставке минус доходность дивидендов, становилась мартингалом при новой вероятностной мере. Цена финансовой производной является наибольшим значением ожидаемых дисконтированных платежей, когда математическое ожидание берется по этой эквивалентной мартингальной мере и дисконтирование вычисляется по безрисковой процентной ставке.

ГЛАВА
1

АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОГО ВРЕМЕНИ

§ 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ В МОДЕЛЯХ НЕПРЕРЫВНОГО ВРЕМЕНИ

Математические средства, которые требуются для формальных выводов, используемых при анализе неопределенности в непрерывно-временной постановке, несколько специализированы и поэтому могут быть незнакомы для тех, кто не изучал стохастический анализ. Например, выборочные траектории для стохастических переменных, порождаемых процессами диффузии, будучи непрерывными, почти нигде не дифференцируемы в обычном смысле. Поэтому чтобы выразить динамику таких процессов, требуется более общий тип дифференциальных уравнений. По обобщенным стохастическим уравнениям имеется обширная математическая литература, однако выводы, хотя и изящные, часто неясные и трудные. Кроме того, эти выводы обеспечивают сравнительно небольшое проникновение в соотношения между формальными математическими предположениями и соответствующими предположениями экономики.

Цель главы – ликвидировать этот пробел, используя только элементарные понятия вероятностного исчисления для получения основных теорем, требуемых для анализа в непрерывном времени, чтобы сделать явными экономические предположения, неявно вложенные в математические предположения. Последнее особенно важно, потому что способ, при помощи которого экономические предположения часто формулируются в экономической литературе, может привести к более ограниченной форме, чем на самом деле. Хотя общий подход состоит в том, чтобы поддерживать предположения настолько слабыми, насколько это возможно, все-таки иногда делаются предположения более ограничительные, чем необходимо. Обычно это делается тогда, когда желателен компромисс между потерей общности и сокращением математической сложности. Для мотивации изучения анализа в непрерывном времени начнем с краткого обзора той роли, которую он сыграл при разработке финансовой экономики в течение последней четверти века, так что содержанием этой главы является разъяснение существенного вклада непрерывно-временного анализа в теорию финансовой экономики.

Предположения о том, что торговля происходит непрерывно во времени и что основные стохастические переменные следуют изменениям диффузионного типа с непрерывными выборочными траекториями, приводят к системе уравнений поведения для выбора меняющейся со временем структуры портфеля, которая и проще, и выгоднее получающейся из соответствующей модели торговли с дискретным временем. Кроме того, те же предположения дают основу для единой теории определения цен как финансовых активов, так и основного капитала, которая аналитически изящна и эмпирически трактуема.

Конечно, непрерывная торговля, подобно любому другому непрерывному процессу переработки информации, является абстракцией реальной действительности. Однако если отрезок времени между реакциями на поступающую информацию очень короткий (или неопределенно мал), тогда модель непрерывной торговли будет приемлемой аппроксимацией модели дискретной торговли. Действительно ли отрезок времени между пересмотрами достаточно короток для непрерывного решения, чтобы обеспечить хорошую аппроксимацию? На этот вопрос следует отвечать основываясь на проведении относительного сравнения решения с другими временными шкалами. Анализ в этой главе представлен в контексте рынка ценных бумаг, когда реальный отрезок времени между наблюдаемыми сделками находится в диапазоне от долей минуты до нескольких дней.

Однако непрерывный анализ может обеспечить хорошее приближение, даже если отрезок времени между пересмотрами ситуации не очень короткий. Например, при анализе продолжительного экономического роста в неоклассической модели капитала обычно пренебрегают «кратковременными» флуктуациями делового цикла и принимают экономику с полной занятостью. Кроме того, обычно считается, что воздействиями экзогенных факторов на траекторию экономики в таких моделях являются или демографические, или технологические изменения. Так как главные изменения в каждом из них вообще происходят достаточно длительно, временной отрезок между пересмотрами акционерного капитала может рассматриваться как мгновенный при применении временной шкалы изменения экзогенных факторов.

Непрерывно-временной анализ в эмпирическом изучении финансовых экономических данных сравнительно молод и мало разработан. Однако он обеспечивает новые подходы к решению некоторых главных проблем в эмпирическом изучении временных рядов рыночных котировок.

Стандартной практикой в прежнем анализе было то, что логарифм отношения последовательных значений цен имел нормальное распределение с однородными по времени независимыми приращениями и стационарными параметрами. Однако выборочные характеристики временных рядов оказывались часто несовместимы с характеристиками, принятыми для свойств популяции. Одно из более важных противоречий – то, что эмпирические распределения изменения цен часто слишком «островершинные» и не совместимы с нормальным распределением, т. е. экстремальные частоты наблюденных значений слишком велики, чтобы быть совместимыми с выборками из нормального распределения.

Устранить эти несоответствия пытались двумя различными способами. Первый предполагал независимые приращения и предположения стационарности, но заменял предположение о нормальности более общим предположением о распределениях, устойчивых в смысле Парето – Леви (Pareto – Levy). Хотя негауссовы члены устойчивого семейства распределений часто аппроксимируют хвосты эмпирических распределений лучше, чем нормальное, эмпирическое подтверждение пока еще слабое, чтобы обосновать принятие гипотезы устойчивости Парето относительно какого-либо островершинного распределения. Кроме того, свойство бесконечности дисперсии негауссовых устойчивых распределений подразумевает, что большинство наших статистических методов, которые основаны на предположениях о конечности моментов (например, метод наименьших квадратов), бесполезны. Гипотеза устойчивости Парето также подразумевает, что даже первый момент или математическое ожидание арифметического изменения цен не существуют.

Значительные теоретические и эмпирические трудности, связанные с гипотезой устойчивости Парето, побудили других авторов рассмотреть альтернативный путь процессов с конечными моментами, чьи распределения являются нестационарными. Этот подход использует непрерывно-временной анализ. Общие непрерывно-временные рамки, которые требуют, чтобы основной процесс был смесью диффузионного и пуассоновского процессов, может предоставлять широкий диапазон определенных гипотез, включая модель с «отражающими барьерами», предложенную П. Кутнером (P. Cootner, 1964). Б. Розенберг (B. Rosenberg, 1972) показал, что гауссова модель с изменяющейся (и предсказуемой) дисперсией «объясняет» наблюдаемые характеристики «тяжелого хвоста» доходности на фондовой бирже. Дж. Розенфельд (Rosenfeld, 1980) разработал статистические методы для оценки параметров непрерывно-временных процессов, которые применены при построении тестов правдоподобия для выбора между процессом диффузии с изменяющейся дисперсией и смешанным диффузионным и пуассоновским процессом. Как показано Мертоном (Merton, 1980), если параметры являются медленно изменяющимися функциями времени, то можно использовать разные «временные шкалы» составляющих процесса непрерывного времени для идентификации и оценки этих параметров.

Конечно, следует провести значительно больше исследований, прежде чем делать выводы относительно преимуществ такого подхода. Однако обширная математическая литература по распределениям этих процессов и свойствам конечности моментов делает разработку испытания гипотез значительно проще для этих процессов, чем для устойчивых процессов Парето – Леви. П. Самюэльсон (Samuelson, 1967) доказал несколько теорем относительно поведения инвесторов, не расположенных к риску, составляющих портфели и сталкивающихся с устойчивыми инвестициями, имеющими распределение Парето – Леви. Однако когда инвестиции распределены логарифмически устойчиво, никто не получил каких-либо уравнений поведения инвесторов. Конечно, это предположение о распределении делается в тех эмпирических исследованиях, в которых доходы предеполагаются распределенными логарифмически устойчиво. При отсутствии теории разрабатывать требования к рассматриваемой модели при гипотезе устойчивости, по Парето, довольно трудно.

Рассматривая это как основу, обратимся к формальной разработке математических и экономических предположений о моделях непрерывного времени.

Пусть h обозначает горизонт торговли, который является *минимальным* отрезком времени, в течение которого на рынке ценных бумаг инвесторами могут быть реализованы последовательные сделки. В межвременном анализе h – это отрезок времени между поочередными рыночными сессиями и, конечно, является элементом конкретизации структуры рынка в экономике. В то время как эта структура будет зависеть от компромисса между операционными расходами рынка и его экономическим эффектом, рассматриваемая временная шкала не определяется индивидуальным инвестором и одинакова для всех инвесторов в экономике. Если $X(t)$ обозначает цену актива в момент времени t, то изменение цены актива между моментами времени $t = 0$ и $T = nh > 0$ может быть записано как

$$X(T) - X(0) = \sum_{k=1}^{n} [X(k) - X(k-1)], \tag{1.1}$$

где n – число интервалов торговли между моментами времени 0 и T, а $X(k) - X(k-1)$ является краткой записью разности $X(kh) - X[(k-1)h]$, которая определяет изменение цены в течение k-го интервала торговли, $k = 1,2,...,n$.

Предположение о непрерывной торговле подразумевает, что интервал торговли h равен инфинитезимальному приращению непрерывного времени dt, и, как обычно для дифференциального исчисления, всеми членами более высокого порядка малости, чем dt, будет пренебрегаться. Чтобы вывести экономические последствия непрерывной торговли, необходимо исследовать математические свойства временных рядов изменения цен в этой среде. Конкретно предельные свойства распределений получаются как для изменения цены по отдельному интервалу торговли, так и для изменения по фиксированному конечному промежутку времени T, поскольку продолжительность интервала торговли становится очень малой, а число интервалов торговли n в $[0, T]$ – очень большим. В интерпретации этого предельного анализа можно представлять процесс как последовательность рыночных структур, где на каждом этапе последовательности установленная продолжительность интервала торговли уменьшается по сравнению с предыдущим этапом. Так, предельный математический анализ показывает, как распределение изменения цены данного актива в течение одного года изменится в результате изменения интервалов торговли от месячного до недельного. Неразумно предполагать, что равновесное распределение дохода от актива по определенному периоду времени (например, один год) будет инвариантным по отношению к интервалу торговли для этого актива, поскольку оптимальные функции спроса инвесторов будут зависеть от того, как часто они смогут корректировать свои портфели. Поэтому следует указать, что нигде в анализе, представленном здесь, не предполагается, что распределение $X(T) - X(0)$ инвариантно относительно h.

Определим оператор E_t условного математического ожидания как оператор математического ожидания при условии знания всей существенной информации, относящейся к моменту времени t или до него. Определим случайные величины $\varepsilon(k)$:

$$\varepsilon(k) \equiv X(k) - X(k-1) - E_{k-1}\{X(k) - X(k-1)\},\; k = 1,\dots, n. \quad (1.2)$$

где «время k» используется как укороченная запись «времени kh».

По определению, $E_{k-1}\{\varepsilon(k)\} = 0$, и $\varepsilon(k)$ является *непредвиденным* изменением цены актива между моментами $k - 1$ и k при фиксированной цене в момент времени $k - 1$. Кроме того, из свойств условного математического ожидания следует, что $E_{k-j}\{\varepsilon(k)\} = 0$ для всех $j = 1,\dots, k$. Следовательно, частные суммы $S_n \equiv \sum_1^n\{\varepsilon(k)\}$ образуют мартингал. Как будет видно, математический анализ в большой степени опирается на свойства мартингалов. Теория мартингалов раньше обычно связывалась в финансовой экономической литературе с «гипотезой эффективного рынка» (*Efficient-Market Hypothesis*) Е. Фамы (Fama, 1965) и П. Самюэльсона (Samuelson, 1965). Поэтому соблазнительно связать мартингальное свойство непредвиденного дохода, полученное здесь, с неявным предположением, что «цены активов определены правильно». Однако мартингальное свойство непредвиденного дохода здесь является чисто конструктивным результатом и поэтому не влечет никакого экономического предположения такого сорта. Однако мы примем два следующих экономических предположения.

Предположение 1.1. Для каждого конечного интервала времени $[0, T]$ существует число $A_1 > 0$, независимое от числа интервалов торговли n такое, что $\mathrm{var}(S_n) \geq A_1$, где $\mathrm{var}(S_n) \equiv E_0\{[\sum_1^n\{\varepsilon(k)\}]^2\}$.

Предположение 1.2. Для каждого конечного интервала времени $[0, T]$ существует число $A_2 < \infty$, независимое от числа интервалов торговли n такое, что $\mathrm{var}(S_n) \leq A_2$.

Предположение 1.1 гарантирует, что неопределенность, связанная с непредвиденными изменениями цен, не «вымывается» или исключается при переходе к непрерывной торговле, даже когда $h \to dt$, цена в конце периода в момент времени k будет неопределенной относительно момента времени $k - 1$. Это предположение существенно для непрерывной модели торговли, чтобы отразить такое фундаментальное свойство поведения цены на бирже.

Предположение 1.2 гарантирует, что неопределенность, связанная с непредвиденным изменением цены на конечном промежутке времени, не настолько большая, чтобы дисперсия становилась неограниченной. Оно исключает возможность того, что сам акт допуска более частой торговли стимулирует достаточную нестабильность цены, чтобы заставить предельную дисперсию $X(T) - X(0)$ стать неограниченной, а это исключает также устойчивые распределения Парето – Леви с бесконечными дисперсиями.

Пусть $V(k) \equiv E_0\{\varepsilon(k)^2\}$, $k = 1, 2,..., n$, обозначает дисперсию денежного дохода актива на интервале времени между моментами $k - 1$ и k, основанную на доступной информации от момента времени 0, и определим $V \equiv \max_k V(k)$.

Предположение 1.3. Существует число A_3, $1 \geq A_3 > 0$, независимое от числа интервалов торговли n такое, что для всех $k = 1,..., n$, $V(k)/V \geq A_3$.

Предположение 1.3 тесно связано с предположением 1.1 и исключает возможность того, что вся неопределенность непредвиденного изменения цены на $[0, T]$ сконцентрирована только в нескольких периодах торговли. Другими словами, неопределенность цен порождается во *всех* периодах торговли.

На самом деле результаты анализа будут иметь место даже если предположение 1.3 ослаблено, чтобы допускать $V(k) = 0$ в некоторых из интервалов торговли при условии, что число таких интервалов имеет верхнюю границу, независимую от n. Однако так как фактически все реальные финансовые активы с сомнительной отдачей проявляют некоторую неопределенность цен даже в очень малых интервалах времени, предположение будет охватывать большинство встречающихся на практике случаев.

Так, предположение 1.3 исключает лотерейные билеты с датой розыгрыша T. В этом случае цена лотерейного билета при безрисковой процентной ставке будет только повышаться до конечного момента, т. е. до розыгрыша. Тогда для каждого n $V(k) = 0$, $k = 1, 2,..., n - 1$, и $V(n) = \sigma^2$, где σ^2 – дисперсия денежного вознаграждения лотереи.

Сделаем небольшой перерыв в рассуждениях, чтобы определить некоторые математические символы, которые будут использоваться далее в анализе. Пусть $\psi(h)$ и $\lambda(h)$ будут функциями h. Определим символы асимптотического порядка малости $O[\lambda(h)]$ и $o[\lambda(h)]$ с помощью равенств $\psi(h) = O[\lambda(h)]$, если предел $\lim[\psi(h)/\lambda(h)]$ ограничен при $h \to 0$, и $\psi(h) = o[\lambda(h)]$, если $\lim[\psi(h)/\lambda(h)] = 0$ при $h \to 0$. Так что, например, если $\psi(h) = ch^{1/2}\exp(h)$, тогда $\psi(h) = O[h^{\gamma}]$ для любых значений $\gamma \leq 1/2$. Чтобы увидеть это, заметим, что $\psi(h)/ h^{\gamma} = ch^{1/2-\gamma}\exp(h)$, и предел этого выражения при $h \to 0$ ограничен для $\gamma \leq 1/2$. Кроме того, $\psi(h) = o[h^{\gamma}]$ для $\gamma < 1/2$, поскольку предел $\psi(h)/ h^{\gamma}$ при $h \to 0$ равен нулю для $\gamma < 1/2$. Если $\psi(h) = O[\lambda(h)]$ и $\psi(h) \neq o[\lambda(h)]$, тогда $\psi(h) \sim \lambda(h)$ при $h \to 0$, где символ ~ означает «является асимптотически пропорциональным». В вышеприведенных примерах $\psi(h) \sim h^{1/2}$. По существу, символы асимптотического порядка малости $O[.]$, $o[.]$ и ~ используются для описания поведения функции $\psi(h)$ относительно функции $\lambda(h)$ для значений h, близких к нулю.

Утверждение 1.1. Если предположения 1.1, 1.2, и 1.3 выполнены, то $V(k) \sim h$, $k = 1,..., n$. То есть $V(k) = O(h)$ и $V(k) \neq o(h)$, и $V(k)$ асимптотически пропорциональна h с положительным коэффициентом пропорциональности.

Доказательство.

$$\mathrm{var}(S_n) = E_0\left\{\sum_1^n\sum_1^n \varepsilon(k)\varepsilon(j)\right\} = \sum_1^n\sum_1^n E_0\{\varepsilon(k)\varepsilon(j)\}.$$

Рассмотрим один из членов двойной суммы $E_0\{\varepsilon(k)\,\varepsilon(j)\}$. Предположим $k \neq j$. Выберем $k > j$. Тогда $E_0\{\varepsilon(k)\,\varepsilon(j)\} = E_0\{\varepsilon(j)\,E_j\,\{\varepsilon(k)\}\}$. Но по предположению $E_j\,\{\varepsilon(k)\} = 0$, $j < k$. Следовательно, $E_0\{\varepsilon(k)\,\varepsilon(j)\} = 0$ для $j < k$. Отсюда $\mathrm{var}(S_n) = \sum_1^n V(k)$. Из предположений 1.2 и 1.3 имеем, что $nVA_3 \leq \sum_1^n V(k) \leq A_2$, поэтому $V(k) \leq A_2h/A_3T$, где $0 < A_2/A_3 < \infty$. Следовательно, $V(k) = O(h)$. Из предположений 1.1 и 1.3 следует, что $V(k) \geq A_1A_3h/T$, где $A_1A_3 > 0$. Следовательно, $V(k) \neq o(h)$.

Доказав утверждение 1.1, обратимся к детальному анализу распределения дохода на отдельном интервале торговли. Для некоторого интервала торговли $[k-1, k]$ предположим, что $\varepsilon(k)$ может принимать любое одно из m значений, обозначаемое $\varepsilon_j(k)$, $j = 1,..., m$, где m конечно. Всякий раз, когда не имеется никакой неоднозначности относительно периода времени k, будем обозначать $\varepsilon_j(k)$ просто как ε_j. Предположим далее, что существует число $M < \infty$, независимое от n, такое что $\varepsilon_j^2(k) \leq M$. Хотя предположение о дискретном распределении значений $\varepsilon(k)$ в конечном диапазоне явно ограничивает класс допустимых распределений, однако оно чрезвычайно упрощает формальные математические объяснения без принятия каких-либо существенных экономических ограничений. Вообще говоря, класс рассматриваемых распределений может быть расширен, чтобы включить в него непрерывные распределения с ограниченными диапазонами и большинство «хороших» непрерывных распределений с бесконечными диапазонами (например, нормальное). Однако, чтобы это сделать, потребуется достаточно продолжительный и сложный математический анализ для доказательства результатов, которые будут получены позже. Поскольку эта дополнительная математическая сложность мало добавляет в понимание экономических предположений, ограничимся дискретными распределениями. Если принять $p_j(k) \equiv \text{prob}\{\varepsilon(k) = \varepsilon_j \mid$ информация, доступная от момента времени $0\}$, тогда из утверждения 1.1 следует, что

$$\sum_1^m p_j \varepsilon_j^2 = O(h). \tag{1.3}$$

Поскольку m конечно, из равенства (1.3) следует, что

$$p_j \varepsilon_j^2 = O(h), \quad j = 1,..., m. \tag{1.4}$$

Любое событие j такое, что $p_j \varepsilon_j^2 = o(h)$, будет давать асимптотически незначительный вклад в дисперсию (1.1), так как $V(k) \neq o(h)$. Поскольку m конечно, из этого следует, что существуют по крайней мере два события такие, что $p_j \varepsilon_j^2 \neq o(h)$, и из равенства (1.4) для таких событий $p_j \varepsilon_j^2 \sim h$. Кроме того, эти события определяют асимптотические характеристики распределений, когда они стремятся к пределу при переходе к непрерывному времени. Без потери общности принимается $p_j \varepsilon_j^2 \neq o(h)$, $j = 1, 2, ..., m$, и поэтому $p_j \varepsilon_j^2 \sim h, j = 1, 2,..., m$.

Предположение 1.4. Для $j = 1, 2,..., m$ величины p_j и ε_j являются функциями h с достаточно «хорошим поведением», чтобы существовали числа q_j и r_j такие, что $p_j \sim h^{q_j}$ и $\varepsilon_j \sim h^{r_j}$.

Хотя предположение 1.4 – это предположение, удобное для иллюстративных целей, оно более сильное, чем необходимо. Например, если $p_j \sim h\log(1/h)$ в окрестности $h = 0$, тогда предположение 1.4 не будет удовлетворено. Однако полученные результаты будут справедливыми, если p_j ведет себя и таким образом.

Из предположения 1.4 $p_j\varepsilon_j^2 \sim h^{q_j+2r_j}$. Но согласно равенству (1.4) $p_j\varepsilon_j^2 \sim h$. Из этого следует, что значения, которые принимают q_j и r_j, не могут быть произвольны, а должны удовлетворять равенствам

$$q_j + 2\,r_j = 1, \quad j = 1, 2, ..., m. \tag{1.5}$$

Поскольку мы интересуемся свойствами этих функций в окрестности $h = 0$ и $h << 1$, то события с большими значениями для r_j будут иметь результаты, меньшие по величине, чем события с малыми значениями для r_j. Аналогично такие события с большими значениями q_j менее вероятны, чем события с малыми значениями для q_j. Уравнение (1.5) определяет соотношение между этими двумя числами, которое должно удовлетворяться для каждого события j. По существу, уравнение (1.5) говорит о том, что «чем больше значение результата, тем меньше вероятность того, что такое событие произойдет». Поскольку $p_j \le 1$ и ε_j^2 ограничено, то как q_j, так и r_j должны быть неотрицательны, и поэтому из равенства (1.5) следует, что $0 \le q_j \le 1$ и $0 \le r_j \le 1/2$, $j = 1, 2,..., m$.

Как будет показано, исходы для r_j, располагающихся на краях допустимого диапазона, определяют асимптотические свойства распределений $\varepsilon(k)$. Поэтому будет полезно выделить три типа исходов: тип I – исходы для $r_j = 1/2$; тип II – исходы для $0 < r_j < 1/2$; тип III – исходы для $r_j = 0$.

Пусть J обозначает множество событий j таких, что исходы ε_j имеют тип I. Из равенства (1.5) следует, что для $j \in J$ $q_j = 0$, и поэтому $p_j \neq o$ (1). Кроме того, для всех событий $j \in J^c$ (т. е. событий с исходами типа II или типа III) $p_j = o(1)$, и поскольку m конечно, сумма $\sum p_j = o(1)$, $j \in J^c$. Следовательно, поскольку $\sum_1^m p_j = 1$, множество J не может быть пустым и почти вся вероятностная масса распределения $\varepsilon(k)$ сосредоточена на событиях, содержащихся в J. Другими словами, для коротких интервалов торговли h фактически все наблюдения $\varepsilon(k)$ будут исходами типа I, и поэтому подходящим названием для J^c могло бы быть «множество редких событий». Это предполагает естественную иерархию анализа: сначала асимптотические свойства $\varepsilon(k)$ получаются для случая, когда все исходы имеют тип I; затем свойства получаются для случая, когда исходы могут быть типа I или типа II; и, наконец, свойства получаются для общего случая, когда исходы могут быть всех трех типов.

§ 2. ПРОЦЕССЫ С НЕПРЕРЫВНЫМИ ВЫБОРОЧНЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ БЕЗ РЕДКИХ СОБЫТИЙ

В этом параграфе принято, что все возможные исходы для $\varepsilon(k)$, $k = 1,..., n$, имеют тип I, и поэтому J^c является пустым, т. е. не происходит никаких редких событий, и каждый возможный исход ε_j, $j = 1,...,m$, может происходить с положительной (не инфинитезимальной) вероятностью.

Определим условное математическое ожидание денежного дохода на актив за единицу времени α_k выражением

$$\alpha_k = E_{k-1}\{X(k) - X(k-1)\} /h, \quad k = 1,..., n. \tag{1.6}$$

Предположение 1.5. Для каждого h принимается, что α_k существует для всех $k = 1,..., n$ и что существует число $\alpha < \infty$, независимое от h, такое, что $|\alpha_k| \le \alpha$.

Предположение 1.5 просто гарантирует, что ожидаемая доходность в единицу времени на все ценные бумаги с конечной ценой по горизонту торговли конечна независимо от того, насколько коротким является горизонт. Заметим, не предполагается, что α_k – постоянная по времени, а практически α_k может быть случайной величиной относительно информации, доступной от момента времени 0 до $k - 1$. На основании определений (1.2) и (1.6) мы можем выразить денежную отдачу на актив за интервал между моментами времени $k - 1$ и k как

$$X(k) - X(k-1) = \alpha_k h + \varepsilon(k), \quad k = 1,..., n. \tag{1.7}$$

Как рассмотрено в § 1, важным предположением, обычно принимаемым в моделях с непрерывной торговлей, является то, что выборочные траектории курсов ценных бумаг непрерывны по времени. Дискретно-временной аналог непрерывности выборочной траектории – это то, что на коротких интервалах времени цены не могут сильно флуктуировать. Поскольку исходы типа I имеют порядок $O(h^{1/2})$, не следует удивляться тому, что это предположение о непрерывности будет удовлетворяться, когда исходы других типов отсутствуют.

Утверждение 1.2. Если для $k = 1,..., n$ все возможные исходы для $\varepsilon(k)$ являются исходами типа I, тогда выборочная траектория цены актива в модели с непрерывным временем будет непрерывной.

Доказательство. Пусть $Q_k(\delta)$ будет вероятностью того, что $|X(k) - X(k-1)| \geq \delta$ при условии знания всей информации, доступной ко времени $k - 1$. Необходимым и достаточным условием (условием Линдеберга) для непрерывности выборочной траектории процесса X является то, что для каждого $\delta > 0$ вероятность $Q_k(\delta) = o(h)$. Определим число $\bar{u}$ равенством $\bar{u} = \max_{\{j\}}|\varepsilon_j|/h^{1/2}$. В соответствии с гипотезой все исходы для ε (k) являются исходами типа I, и поэтому имеем $\bar{u} = O(1)$. Теперь для каждого числа $\delta > 0$ определим функцию $h^+(\delta)$ как решение уравнения $\delta = \alpha\, h^+ + \bar{u}\,(h^+)^{1/2}$. Поскольку α и $\bar{u}$ имеют порядок $O(1)$, то $h^+(\delta) > 0$ для всякого $\delta > 0$. Таким образом, для всякого $h < h^+(\delta)$ и каждого возможного исхода $X(k)$ абсолютное приращение $|X(k) - X(k-1)| < \delta$. Так что для каждого h, $0 \leq h < h^+(\delta)$, вероятность $Q_k(\delta) \equiv 0$ и, следовательно, $\lim\, [Q_k(\delta)/h] = 0$ при $h \to 0$.

Хотя выборочная траектория процесса $X(t)$ непрерывна, она почти нигде не дифференцируема (рис. 1.1). Рассмотрим изменение процесса $X(t)$ между моментами времени $k - 1$ и k, когда реализуется $\varepsilon(k) = \varepsilon_j$. Это означает, что $[X(k) - X(k-1)]/h = \alpha_k + \varepsilon_j/h$. Но ε_j асимптотически пропорциональна $h^{1/2}$ и, следовательно, $[X(k) - X(k-1)]/h \sim 1/h^{1/2}$, что расходится при $h \to 0$. Таким образом, обычный анализ и стандартная теория дифференциальных уравнений не могут быть использованы для описания динамики изменений цены акций. Однако существует обобщенный анализ и соответствующая теория стохастических дифференциальных уравнений, которые могут быть использованы вместо них.

Чтобы построить этот обобщенный анализ будет полезно установить определенные свойства моментов разности $[X(k) - X(k-1)]$. Определим условную дисперсию денежного дохода от актива σ_k^2 за единицу времени равенством

$$\sigma_k^2 \equiv E_{k-1}\{\varepsilon^2(k)\}/\, h, \qquad k = 1,\ldots, n. \tag{1.8}$$

Поскольку $\varepsilon_j^2 = O(h)$ для каждого исхода ε_j, значит $\sigma_k^2 = O(1)$. Кроме того, из предположений 1.1 и 1.3 следует, что $\sigma_k^2 > 0$ для всех h. Так как α_k ограничено, то

$$E_{k-1}\{[X(k) - X(k-1)]^2\} = \sigma_k^2\, h + o(h), \quad k = 1,\ldots, n.$$

Отсюда с точностью до членов порядка малости h условные вторые центральные и нецентральные моменты разности $[X(k) - X(k-1)]$ одинаковы. Заметим, что нами не предполагалось, что σ_k^2 является постоянной во времени, на самом же деле она может быть случайной величиной дат более ранних, чем $k - 1$.

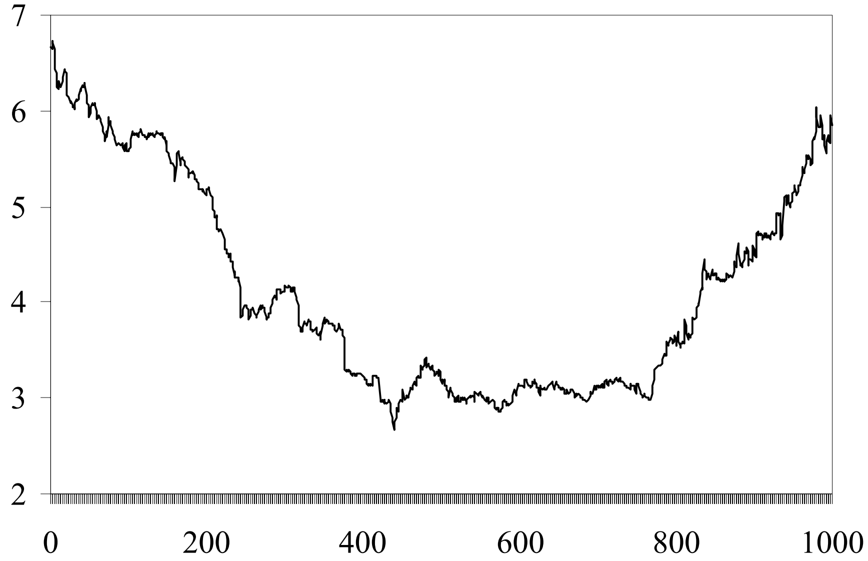

Рис. 1.1. Непрерывная во времени выборочная траектория для доходности актива с исходами типа I

Рассмотрим теперь N-й безусловный абсолютный момент отклонения $\varepsilon(k)$, $2 < N < \infty$. Используя то же определение величины $\bar{u}$, какое дано в доказательстве утверждения 1.2, для $k = 1,..., n$ имеем

$$E_0\{|\varepsilon(k)|^N\} = \sum_1^m p_j \left|\varepsilon_j\right|^N \le \sum_1^m p_j (\bar{u})^N h^{N/2} \le \bar{u}^N h^{N/2} =$$

$$= o(h), \ N > 2. \tag{1.9}$$

Таким образом, все абсолютные моменты $\varepsilon(k)$ более высокого порядка, чем второй, асимптотически пренебрежимо малы по сравнению с первыми двумя моментами. Аналогично

$$E_0\{|X(k) - X(k-1)|^N\} \le (\alpha h + \bar{u}\, h^{1/2})^N = \bar{u}\, h^{N/2} + o(h^{N/2}). \tag{1.10}$$

Следовательно, с точностью до членов порядка малости $h^{N/2}$ безусловные N-е центральные и нецентральные абсолютные моменты разности $X(k) - X(k-1)$ одинаковы.

Так как соотношения порядков для моментов, полученные в представлениях (1.9) и (1.10), зависят только от $\{\varepsilon_j\} = O(h^{1/2})$ и ограниченности α_k, а не от вероятностей определенных исходов $\{p_j\}$, то отсюда немедленно следует, что соотношения порядков значений условных моментов будут такими же, как и для безусловных моментов. Поэтому

$$E_{k-1}\{|\varepsilon(k)|^N\} = o(h) \text{ для } N > 2$$

и

$$E_{k-1}\{|X(k) - X(k-1)|^N\} = E_{k-1}\{|\varepsilon(k)|^N\} + o(h^{N/2}). \qquad (1.11)$$

Определим случайную величину $u(k)$, $k = 1,..., n$, равенством

$$u(k) \equiv \varepsilon(k)/(\sigma_k^2\, h)^{1/2}$$

где по построению $u_j \equiv \varepsilon_j/(\sigma_k^2 h)^{1/2} = O(1)$, $j = 1,..., m$; $E_{k-1}\{u(k)\} = 0$; $E_{k-1}\{u^2(k)\} = 1$; $E_{k-1}\{|u(k)|^N\} = O(1)$ для $N > 2$.

Теперь равенство (1.7) можно переписать как

$$X(k) - X(k-1) = \alpha_k\, h + \sigma_k\, u(k)\, h^{1/2}, \quad k = 1,..., n. \qquad (1.12)$$

Следовательно, когда непредвиденные изменения цены актива являются исходами только типа I, динамика изменения цены может быть записана как стохастическое разностное уравнение в виде (1.12), где все явные случайные величины в правой части имеют порядок $O(1)$ и поэтому не являются ни неограниченно малыми, ни неограниченно большими в пределе при $h \to 0$. Заметим, что в момент времени $k - 1$ единственной случайной величиной оказывается $u(k)$, поэтому равенство (1.12) называется условным стохастическим разностным уравнением.

Вид уравнения (1.12) делает явным важное свойство, часто наблюдаемое для отдачи на актив, а именно: поскольку α_k, σ_k и $u(k)$ имеют порядок $O(1)$, реализующаяся отдача на актив за очень короткий интервал торговли будет полностью определяться его стохастической составляющей $\sigma_k u(k) h^{1/2}$. Например, сомнительно найти акцию с годовыми стандартными отклонениями доходности между 15 и 20 %. Это подразумевало бы, что изменения цены порядка 1 % за операционный день нередки. Однако опыт показывает, что если ожидаемая годовая ставка дохода на акцию имеет такой же порядок, как и его годовое стандартное отклонение, скажем, 15 %, то ожидаемая ставка дохода в операционный день будет иметь порядок 0,05 %, что является незначительным по сравнению со стандартным отклонением. Конечно, этот выбор неявно сделан раньше при обсуждении моментов, когда было показано, что с точностью до порядка малости h вторые центральные и нецентральные моменты $X(k) - X(k-1)$ одинаковы. Однако из этого не следует, что в выборе оптимального портфеля даже при непрерывной торговле инвестору следует пренебрегать различиями между ожидаемыми отдачами акций. Значение имеют первый и второй моменты отдачи, которые, как было показано, являются величинами одинакового порядка малости $O(h)$.

Установив многие из существенных асимптотических свойств для $X(k) - X(k-1)$, получим характеристики распределений случайных величин, которые сами являются функциями цен активов. Эти характеристики распределений особенно важны для теории выбора портфелей и определения цен финансовых производных (*contingent-claims pricing*). Одним примером такой финансовой производной (*contingent claim*) служит опцион-колл (*call option*) на обыкновенную акцию (*common-stock*), который дает его владельцу право купить указанное число долей акции по определенной цене в указанную дату или до нее. Ясно, что цена опциона будет функцией цены лежащей в основе акции (*underlying stock*).

Пусть $F(t)$ будет случайной величиной, заданной в соответствии с правилом $F(t) = f(X, t)$, если $X(t) = X$, где f является функцией из C^2 с ограниченными третьими частными производными. (Предположение о том, что f имеет ограниченные третьи производные не существенно при анализе, но просто делается для аналитического удобства. Фактически все, что здесь требуется, – это то, что третьи производные ограничены в малой окрестности $X(t) = X$.) Следуя соглашению, установленному для $X(t)$, используем более краткую запись $F(k)$ для $F(kh)$ и $f[X(k), k]$ вместо $f[X(kh), kh]$. Предположим, что мы рассматриваем ситуацию в момент времени $k-1$, и поэтому знаем значения процесса $X(k-1)$, α_k, σ_k и $\{p_j'\}$, где p_j' определяется как условная вероятность того, что $u(k) = u_j$, $j = 1,\dots, m$, при фиксированной информации, доступной вплоть до момента времени $k-1$. Обозначим через X известное значение $X(k-1)$. Определим числа $\{X_j\}$ равенствами

$$X_j \equiv X + \alpha_k h + \sigma_k u_j h^{1/2}, \quad j = 1,\dots, m. \tag{1.13}$$

Для каждого значения X_j можно использовать разложение Тейлора для получения соотношения

$$f(X_j, k) = f(X, k-1) + f_1(X, k-1)(\alpha_k h + \sigma_k u_j h^{1/2}) + f_2(X, k-1)\, h +$$
$$+ f_{11}(X, k-1)(\alpha_k h + \sigma_k u_j h^{1/2})^2/2 + R_j, \; j = 1,\dots, m, \tag{1.14}$$

где индексы обозначают частные производные по аргументу соответствующего номера, т. е.

$$f_1(X, k-1) \equiv \left.\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}\right|_{x=X,\ t=(k-1)h}, \quad f_2(X, k-1) \equiv \left.\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\right|_{x=X,\ t=(k-1)h},$$

а R_j определяется выражением

$$R_j \equiv f_{22}(X, k-1)\, h^2/2 + f_{12}(X, k-1)(\alpha_k h + \sigma_k u_j h^{1/2})h +$$

$$+ f_{111}(\eta_j, \zeta_j)(X_j - X)^3/6 + f_{112}(\eta_j, \zeta_j)(X_j - X)^2 h/2 +$$

$$+ f_{122}(\eta_j, \zeta_j)(X_j - X)h^2/2 + f_{222}(\eta_j, \zeta_j)h^3/6,$$

где $\eta_j \equiv X + \theta_j (X_j - X)$ и $\zeta_j \equiv (k-1) + \nu_j$ для некоторых θ_j и ν_j таких, что $0 \le \theta_j \le 1$ и $0 \le \nu_j \le 1$.

Поскольку все третьи частные производные функции f ограничены и $u_j = O(1)$, $j = 1,\dots, m$, то, подставляя X_j из равенств (1.13) в (1.14), для всяких j имеем

$$|R_j| = O(h^{3/2}) = o(h), \quad j = 1,\dots, m.$$

Заметив, что $(\alpha_k h + \sigma_k u_j h^{1/2})^2 = \sigma_k^2 u_j^2 h + o(h)$, представление (1.14) можем переписать в виде

$$f(X_j, k) = f(X, k-1) + f_1(X, k-1)(\alpha_k h + \sigma_k u_j h^{1/2}) + f_2(X, k-1)\, h +$$

$$+ f_{11}(X, k-1)\sigma_k^2 u_j^2 h/2 + o(h), \quad j = 1,\dots, m. \tag{1.15}$$

Так как представление (1.15) имеет место для всякого j, мы можем приближенно описать динамику $F(k)$ в виде условного стохастического разностного уравнения с помощью соотношения

$$F(k) - F(k-1) = \{f_1(X(k-1), k-1)\alpha_k + f_2(X(k-1), k-1) +$$

$$+ f_{11}(X(k-1), k-1)\sigma_k^2 u^2(k)/2\}\, h +$$

$$+ f_1(X(k-1), k-1)\, \sigma_k u(k)\, h^{1/2} + o(h), \quad k = 1,\dots, n, \tag{1.16}$$

где равенство (1.16) является условным при фиксированных $X(k-1)$, α_k и σ_k.

Формальное применение оператора условного математического ожидания E_{k-1} к обеим сторонам равенства (1.16) приводит к такому же результату, что и строгая операция умножения обеих сторон равенства (1.15) на p_j' и затем суммирование по $j = 1,..., m$. Замечая, что производные функции f в правой части равенства (1.16) оцениваются при $X(k-1)$ и поэтому являются нестохастическими в момент времени $k-1$, для $k = 1,..., n$ имеем

$$E_{k-1}\{F(k) - F(k-1)\} = \{f_1(X(k-1), k-1)\alpha_k + f_2(X(k-1), k-1) + \\ + f_{11}(X(k-1), k-1)\sigma_k^2/2\}\, h + o(h). \quad (1.17)$$

Определим $\mu_k \equiv E_{k-1}\{F(k) - F(k-1)\}/h$, что является условным математическим ожиданием изменения F за единицу времени, и из (1.17) получим для него выражение при $k = 1, ..., n$

$$\mu_k = \{f_1(X(k-1), k-1)\alpha_k + f_2(X(k-1), k-1) + \\ + f_{11}(X(k-1), k-1)\sigma_k^2/2\} + o(1). \quad (1.18)$$

Подобно α_k, $\mu_k = O(1)$ и с точностью до этого порядка малости полностью определяется только через $X(k-1)$ и первые два момента изменения процесса X.

Используя выражение (1.18), равенство (1.16) можно переписать в виде

$$F(k) - F(k-1) = \mu_k h + f_{11}(X(k-1), k-1)\sigma_k^2[u^2(k) - 1]\, h/2 + \\ + f_1(X(k-1), k-1)\sigma_k u(k)\, h^{1/2} + o(h). \quad (1.19)$$

Из равенства (1.19) следует, что с точностью до членов порядка малости h условное стохастическое разностное уравнение для разности $F(k) - F(k-1)$ имело бы почти такой же вид, что и уравнение (1.12) для $X(k) - X(k-1)$, если бы не дополнительное стохастическое слагаемое порядка $O(h)$. Аналогичными рассуждениями, как и при обсуждении уравнения (1.12), выясняется, что реализующееся изменение F на очень коротком интервале времени полностью доминируется стохастическим слагаемым $f_1(X(k-1), k-1)\sigma_k u(k)h^{1/2}$. Действительно, с помощью равенства (1.19) можно записать условные моменты для $F(k) - F(k-1)$ как

$$E_{k-1}\{[F(k) - F(k-1)]^2\} = \{f_1(X(k-1), k-1)\sigma_k\}^2 h + o(h) \quad (1.20)$$

и

$$E_{k-1}\{[F(k) - F(k-1)]^N\} = O(h^{N/2}) = o(h), \ N > 2. \quad (1.21)$$

Таким образом, соотношение порядков малости для условных моментов $F(k) - F(k-1)$ точно такое же, что и для условных моментов приращений $X(k) - X(k-1)$, и стохастическое слагаемое порядка малости $O(h)$ делает незначительным вклад моментов $F(k) - F(k-1)$.

Оказывается, что не только соотношения между порядками малости самих моментов приращений F и X одинаковые, но и смешанные моменты одновременных приращений имеют одинаковые соотношения порядков малости. Действительно, из равенств (1.12) и (1.19) имеем

$$E_{k-1}\{[F(k) - F(k-1)][X(k) - X(k-1)]\} =$$

$$= \{f_1(X(k-1), k-1)\, \sigma_k\}^2\, h + o(h) \tag{1.22}$$

и

$$E_{k-1}\{[F(k) - F(k-1)]^{j}\,[X(k) - X(k-1)]^{N-j}\} =$$

$$= O(h^{N/2}) = o(h),\quad j = 1,\dots, N,\quad N > 2. \tag{1.23}$$

Хотя формулы (1.22) и (1.23) определяют нецентральные взаимные моменты, разность между центральными и нецентральными взаимными моментами будет иметь порядок $o(h)$, и поэтому они взаимозаменяемы при использовании. Например, взаимная ковариация приращений F и X будет отличаться от правой части равенства (1.22) величиной $-\mu_k\alpha_k h^2 = o(h)$.

Наконец, мы имеем довольно сильный результат, что с точностью до членов порядка малости h одновременные приращения F и X полностью коррелированы. Таким образом, если определить ρ_k как условный коэффициент корреляции между одновременными изменениями F и X за единицу времени, то из выражений (1.20) и (1.22) получим

$$\rho_k = \begin{cases} 1 + o(1), & \text{если}\quad f_1[X(k-1), k-1] > 0; \\ -1 + o(1), & \text{если}\quad f_1[X(k-1), k-1] < 0. \end{cases}$$

Следовательно, даже если F является нелинейной функцией X, то их мгновенные одновременные изменения за очень короткий промежуток времени будут полностью коррелированы.

Показав, что стохастическое слагаемое порядка $O(h)$ вносит незначительный вклад в изменение F за очень короткий интервал времени, исследуем его вклад в приращение F за конечный, а необязательно короткий интервал времени. Определим случайную величину $G(t)$ равенством

$$G(k) - G(k-1) \equiv F(k) - F(k-1) - \mu_k h -$$
$$- f_1(X(k-1), k-1)\sigma_k u(k) h^{1/2},\ k = 1,..., n. \qquad (1.24)$$

Таким образом, $G(k) - G(k-1)$ является величиной случайной ошибки при аппроксимации приращения $F(k) - F(k-1)$ с помощью выражения $\mu_k h + f_1\sigma_k u(k)h^{1/2}$.

Если мы определим

$$y(k) \equiv f_{11}(X(k-1), k-1)\sigma_k^2 [u^2(k) - 1]/2,$$

тогда из равенства (1.19) тождество (1.24) можно переписать как

$$G(k) - G(k-1) = y(k)\, h + o(h), \quad k = 1,..., n. \qquad (1.25)$$

По построению $E_{k-1}\{y(k)\} = 0$, поэтому $E_{k-j}\{y(k)\} = 0$, $j = 1,..., k$. Следовательно, частичные суммы $\sum_1^n y(k)$ образуют мартингал. Поскольку $E_0\left(\sum_1^n y^2(k)\big/k^2\right) < \infty$ при $n \to \infty$, из закона больших чисел для мартингалов следует, что

$$\lim\left(h\sum_{k=1}^{n} y(k)\right) = T\lim\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y(k)\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty. \qquad (1.26)$$

Из равенства (1.25) для фиксированного $T\,(\equiv nh) > 0$

$$G(T) - G(0) = h\sum_{k=1}^{n} y(k) + \sum_{k=1}^{n} o(h) = h\sum_{k=1}^{n} y(k) + o(1). \qquad (1.27)$$

При вычислении предела (1.27) при $n \to \infty$ ($h \to 0$) из предельного соотношения (1.26) имеем, что $G(T) - G(0) \to 0$. То есть накопленная ошибка аппроксимации стремится к нулю с вероятностью единица.

Следовательно, для $T > 0$ из определения (1.24) имеем, что при переходе к непрерывному времени (т. е. при $h \to 0$)

$$F(T) - F(0) = \sum_{1}^{n}[F(k) - F(k-1)] = \sum_{k=1}^{n}\mu_k h +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} f_1[X(k-1), k-1]\sigma_k u(k) h^{1/2} \qquad (1.28)$$

с вероятностью единица. Таким образом, при переходе к непрерывному времени стохастический член порядка $O(h)$ в представлении (1.19) будет давать незначительный вклад в изменение F на конечном интервале времени.

Естественно интерпретировать предельные суммы в равенстве (1.28) как интегралы. Для каждого k, $k = 1,\ldots, n$, определим $t \equiv kh$. С помощью обычных рассуждений при переходе к пределу для римановских интегралов

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k h\right) = \int_0^T \mu(t)dt, \tag{1.29}$$

где $\mu(t)$ – предел величины μ_k при переходе к непрерывному времени и называется мгновенным условным математическим ожиданием изменения F за единицу времени при заданной информации, доступной до момента времени t.

Конечно, из-за коэффициента $h^{1/2}$ вторая сумма не будет удовлетворять обычным римановским интегральным условиям. Однако формально мы можем продолжить и определить стохастический интеграл как предельную сумму, задаваемую равенством

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f_1[X(k-1),\, k-1]\sigma_k u(k)h^{1/2}\right) \equiv \int_0^T f_1[X(t),\, t]\sigma(t)u(t)(dt)^{1/2},$$

где обозначение $(dt)^{1/2}$ используется, чтобы отличить этот интеграл от обычного интеграла Римана в формуле (1.29).

Следовательно, из представления (1.28) мы имеем, что изменение F между 0 и T может быть записано в виде

$$F(T) - F(0) = \int_0^T \mu(t)dt + \int_0^T f_1[X(t),\, t]\sigma(t)u(t)(dt)^{1/2}, \tag{1.30}$$

где равенство (1.30) выполняется с вероятностью единица.

Задав это стохастическое интегральное представление для изменения F на конечном интервале времени, мы формально продолжим анализ, чтобы определить стохастический дифференциал для F:

$$dF(t) = \mu(t)\, dt + f_1[X(t),\, t]\sigma(t)\, u(t)\, (dt)^{1/2}, \tag{1.31}$$

где запись в форме дифференциала dF используется вместо обычного обозначения производной по времени dF/dt, чтобы подчеркнуть ранее полученный результат, что почти всюду выборочные траектории не дифференцируемы в обычном смысле.

По аналогии с разностными уравнениями (1.12) и (1.19) равенство (1.31) может интерпретироваться как условное стохастическое дифференциальное уравнение при фиксированной информации, доступной вплоть до момента времени t, и включающей $\mu(t)$, $X(t)$ и $\sigma(t)$, но, конечно, не процесс $u(t)$, который является источником случайного изменения F от $F(t)$ к $F(t + dt)$. При формальном вычислении предельного выражения равенства (1.19) для $h \to dt$ и при пренебрежении членами порядка $o(dt)$ кажется, что равенство (1.31) не учитывает члены порядка $O(dt)$, а именно $f_{11}(X(k-1), k-1)\sigma_k^2[u^2(k)-1]dt/2$. Однако, как было показано, вклад этого стохастического члена порядка $O(dt)$ в значения моментов приращения dF на интервале бесконечно малой длительности dt равен $o(dt)$, и на конечном интервале он исчезает согласно закону больших чисел. Следовательно, с вероятностью единица распределение процесса, задаваемого уравнением (1.31), неотличимо от распределения процесса с включением дополнительного стохастического члена порядка $O(dt)$. Хотя $\mu(t)dt$ имеет такой же порядок малости, как и стохастический член порядка $O(dt)$, которым мы пренебрегли, им пренебрегать нельзя на инфинитезимальном интервале, поскольку он является первым моментом приращения F, имеющим тот же порядок, что и второй момент. Им нельзя пренебрегать на конечном интервале $[0, T]$, потому что в отличие от стохастической составляющей порядка $O(dt)$ частичные суммы $\mu_k dt$ не образуют мартингал, и закон больших чисел не применим.

Соответствующие стохастические интегральное и дифференциальное представления для динамики $X(t)$ могут быть записаны непосредственно из представлений (1.30) и (1.31) путем простого выбора $f(X, t) = X$, а именно из равенства (1.30) получим

$$X(T) - X(0) = \int_0^T \alpha(t)dt + \int_0^T \sigma(t)u(t)(dt)^{1/2} \tag{1.32}$$

и

$$dX(t) = \alpha(t)\,dt + \sigma(t)\,u(t)\,(dt)^{1/2}, \tag{1.33}$$

где стохастическое слагаемое порядка $O(dt)$, которым пренебрегаем, тождественно равно нулю, поскольку $f_{11} \equiv 0$.

В ходе проведенного анализа единственными ограничениями на распределение $u(t)$ были следующие: а) $E\{u(t)\} = 0$; б) $E\{u^2(t)\} = 1$; в) $u(t) = O(1)$ и г) распределение для $u(t)$ дискретно. Ограничения а) и б) являются чисто конструктивными, а в) и г) можно ослабить, чтобы сделать допустимыми наиболее удобные для анализа непрерывные распределения, в том числе с неограниченной областью определения. В частности, не предполагалось, что $\{u(t)\}$ были или одинаково распределены, или взаимно независимы. Однако чтобы развивать анализ далее, требуется дополнительное экономическое предположение.

Предположение 1.6. Случайный процесс $X(t)$ является процессом Маркова. Другими словами, распределение условной вероятности для будущих значений X при фиксированном его значении в момент времени t зависит только от текущего значения X, и включение дальнейшей информации, имеющейся до этой даты, не будет изменять условную вероятность.

Хотя предположение 1.6 может показаться довольно ограничительным, многие процессы, которые являются формально не марковскими, могут быть преобразованы в марковские методом расширения пространства состояний, и поэтому предположение 1.6 можно ослабить, сказав, что условные вероятности X зависят только от конечного объема прошлой информации. На основании предположения 1.6 можно написать условные плотности вероятностей для $X(T) = X$ в момент T при фиксированном $X(t) = x$ в виде

$$p(x, t) \equiv p(x, t; X, T) = \text{prob}\{X(T) = X \mid X(t) = x\}, \quad t < T, \qquad (1.34)$$

где аргументы X и T опускаются в связи с тем, что они будут считаться фиксированными.

Для фиксированных X и T функция $p[X(t), t]$, рассматриваемая в моменты времени до даты t, – случайная величина, которая является функцией цены актива в момент времени t. Поэтому при условии, что p – функция x и t, удобная для анализа, она будет удовлетворять всем свойствам, предварительно полученным для $F(t)$. В частности, при переходе к непрерывной торговле dp будет удовлетворять уравнению (1.31), где $\mu(t)$ – условное математическое ожидание изменения p за единицу времени. Однако p – это плотность вероятности, и поэтому математическое ожидание ее изменения равно нулю. Вычисление предела в равенстве (1.18) при $h \to 0$ и применение условия $\mu(t) = 0$ дает, что

$$0 = \sigma^2(x, t)\, p_{11}(x, t)/2 + \alpha(x, t)\, p_1(x, t) + p_2(x, t), \qquad (1.35)$$

где индексы при p обозначают частные производные.

Кроме того, в соответствии с марковским предположением 1.6 $\alpha(t)$ и $\sigma^2(t)$ являются, самое большее, функциями $x(t)$ и t. Следовательно, мы делаем эту зависимость явной, переписывая функции соответственно как $\alpha(x, t)$ и $\sigma^2(x, t)$. Анализ равенства (1.35) показывает, что это линейное дифференциальное уравнение в частных производных параболического типа (оно называется обратным уравнением Колмогорова). Поэтому при выполнении граничных условий уравнение (1.35) полностью определяет переходную плотность вероятностей для цены актива. Следовательно, при переходе к непрерывной торговле достаточно знать только функции $\alpha(x, t)$ и $\sigma^2(x, t)$, чтобы определить распределение вероятности изменений цен активов между любыми двумя датами.

Отсюда следует, что единственными характеристиками распределений $\{u(t)\}$, которые влияют на асимптотическое распределение для цены актива, являются первый и второй моменты, а по построению они постоянные во времени. То есть если бы не требования масштабирования на первые два момента, характеристики распределения $\{u(t)\}$ могли бы быть выбраны практически произвольно без какого-либо влияния на асимптотическое распределение для цены актива. Следовательно, при переходе к непрерывной торговле ничто из экономического содержания не будет потеряно, если принять, что $\{u(t)\}$ независимы и одинаково распределены, поэтому для оставшейся части данного параграфа мы примем такое предположение. Следует отметить, что это не означает, что такие же свойства имеют приращения $X(t)$ или $F(t)$. Действительно, если $\alpha(t)$ или $\sigma^2(t)$ является функцией $X(t)$, тогда приращения $X(t)$ не будут ни независимыми, ни одинаково распределенными.

Определим $W(t)$ как случайную величину, изменение которой во времени описывается стохастическим разностным уравнением, аналогичным уравнению (1.12), но с $\alpha_k \equiv 0$ и $\sigma_k \equiv 1$, $k = 1,..., n$. Другими словами, условное математическое ожидание приращения $W(t)$ за единицу времени является нулевым, и условная дисперсия этого приращения за единицу времени равна 1. Поэтому

$$W(T) - W(0) = \sum_{k=1}^{n}[W(k) - W(k-1)] =$$

$$= \sqrt{h}\sum_{k=1}^{n} u(k) = \sqrt{T}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} u(k). \qquad (1.36)$$

Величины $\{u(k)\}$ независимы и одинаково распределены с нулевым средним и единичной дисперсией. Поэтому согласно центральной предельной теореме при переходе к непрерывной торговле выражение $\sum_1^n u(k)\big/\sqrt{n}$ будет иметь стандартное нормальное распределение. Из представления (1.36) следует, что асимптотически $W(T) - W(0)$ будет нормально распределено с нулевым средним и дисперсией, равной T для всех $T > 0$. Действительно, решение уравнения (1.35) с $\sigma^2 = 1$ и $\alpha = 0$ имеет вид

$$p(x,\, t;\, X,\, T) = \frac{\exp[-(X-x)^2 \big/ 2(T-t)]}{\sqrt{2\pi(T-t)}},$$

что является плотностью нормального распределения.

Так как выбор распределения для $\{u(t)\}$ может быть сделан почти произвольно и предельное распределение для $W(T) - W(0)$ является нормальным для всех конечных T, естественно и удобно предположить, что $\{u(t)\}$ имеет стандартное нормальное распределение. Аналогичным способом, как было сделано при получении представления (1.33), стохастическое дифференциальное уравнение для $W(t)$ можно выразить в форме

$$dW(t) = u(t)\,(dt)^{1/2}. \qquad (1.37)$$

Если $\{u(t)\}$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение, процесс dW, описываемый уравнением (1.37), называется винеровским процессом или процессом броуновского движения, и мы зарезервируем обозначение dW для обозначения такого процесса повсюду в этой главе.

Такой выбор распределения для $\{u(t)\}$ не влияет на предельное распределение X, поэтому без потери общности мы можем переписать стохастические интегральные и дифференциальные представления для динамики $X(t)$, т. е. уравнения (1.32) и (1.33) в виде

$$X(T) - X(0) = \int_0^T \alpha(X(t),\, t)\,dt + \int_0^T \sigma(X(t),\, t)\,dW(t) \qquad (1.38)$$

и

$$dX(t) = \alpha\,(X(t),\, t)\,dt + \sigma\,(X(t),\, t)\,dW(t). \qquad (1.39)$$

Класс марковских процессов непрерывного времени, чья динамика может быть записана в форме (1.38) и (1.39), называется процессами Ито и является частным случаем более общего класса случайных процессов, называемых строго диффузионными процессами.

Из представлений (1.30) и (1.31) непосредственно следует, что если динамика $X(t)$ может быть описана процессом Ито, то динамика хорошо определенных функций $X(t)$ также будет описываться процессом Ито. Это соотношение между динамикой $X(t)$ и $F(t)$ формализовано в следующей лемме.

Лемма Ито. Пусть $f(X, t)$ будет функцией из C^2, определенной на $R \times [0, \infty]$, а $X(t)$ задается стохастическим интегралом, определенным равенством (1.38), тогда зависящая от времени случайная величина $F \equiv f$ является стохастическим интегралом, а ее стохастический дифференциал

$$dF = f_1(X, t)\, dX + f_2(X, t)\, dt + f_{11}(X, t)\, (dX)^2/2,$$

причем произведение дифференциалов определено правилами умножения $(dW)^2 = dt$, $dW\, dt = 0$ и $(dt)^2 = 0$.

Доказательство леммы Ито следует из соотношений (1.18), (1.29), (1.30) и (1.31). Лемма Ито формулирует правило дифференцирования для обобщенного стохастического исчисления и, по существу, является аналогом фундаментальной теоремы стандартного анализа вычисления производных сложных функций. Стохастические дифференциальные уравнения и лемма Ито – основные математические средства, используемые в анализе моделей экономических процессов непрерывного времени.

Получением леммы Ито завершается формальный математический анализ этого раздела, и можно подвести некоторые итоги. Предположим, что экономическая структура, которую нужно проанализировать, такова, что предположения 1.1−1.6 выполняются, и непредвиденные изменения цены активов могут быть исходами только типа I (т. е. не появляется никаких «редких событий»). Тогда в моделях непрерывной торговли такой структуры динамика цен активов всегда может быть описана без потери общности процессами Ито. Действительно, поскольку интеграл от винеровского процесса нормально распределен, обычное предположение о динамике цен в финансовой экономической литературе: «изменение цен активов $X(t + h) - X(t)$ на коротких интервалах времени распределено приблизительно нормально», может быть заменено формальным предположением о том, что имеет место уравнение (1.39). Если это интерпретируется корректно, то нет никаких недостатков в принятии предположения о динамике цен таким способом. Однако возможны, по крайней мере, два заблуждения.

Во-первых, принятие такого предположения подразумевает, что $\{u(t)\}$ независимы и имеют одинаковое стандартное нормальное распределение. Следовательно, это может привести к убеждению, что предположение нормальности является существенным для анализа, а не просто для удобства. Например, полученная динамика непрерывной торговли будет эквивалентна динамике, при которой величины $\{u(t)\}$ имеют биномиальное распределение при условии, что параметры этого распределения выбраны так, чтобы удовлетворялись равенства $E\{u(t)\} = 0$ и $E\{u^2(t)\} = 1$. (Биномиальное распределение, которое удовлетворяет этим условиям, должно иметь $u_1 = 1$ и $u_2 = -1$ с вероятностями 1/2. Следовательно, $u^2(t) = 1$ с вероятностью единица, и поэтому стохастический член порядка $O(h)$, присутствующий в равенствах (1.19), (1.24)–(1.27), будет нулевым даже для конечного h.) Хотя в структурном анализе последовательности рыночных ситуаций соответствующая последовательность функций распределения для $X(t + h) - X(t)$ будет зависеть от распределения $\{u(t)\}$, предельное распределение этой последовательности не будет зависеть от него. Кроме того, независимо от распределения $\{u(t)\}$ решения непрерывной торговли обеспечат равномерно допустимые приближения (с точностью $o(h)$) решений дискретной торговли. Поэтому предположение нормальности для $\{u(t)\}$ не налагает больше никаких ограничений на процесс за пределами предположений 1.1–1.6.

Во-вторых, поскольку $X(T) - X(0) = \sum_1^n [X(k) - X(k-1)]$, то принятие указанного предположения может привести к предположению, что изменения цен активов на конечном интервале $[0, T]$ будут (приблизительно) нормально распределены, что явно не вытекает из уравнения (1.39). Например, если функции $\alpha(X, t) = aX$ и $\sigma(X, t) = bX$ линейные с постоянными коэффициентами a и b, тогда можно показать, что решение $X(T)$ уравнения (1.35) будет иметь логарифмически нормальное распределение

$$E_0\{X(T)\} = X(0) \exp(aT) \text{ и } \operatorname{var}\{\log X(T)\} = b^2 T$$

для всех $T > 0$, а нормальное и логарифмически нормальное распределения принципиально различаются. Действительно, нормальное распределение для $X(T) - X(0)$ подразумевает положительную вероятность того, что $X(T)$ может быть отрицательным, в то время как согласно логарифмически нормальному распределению $X(T)$ никогда не может быть отрицательным.

На основании этого предположением о динамике цен, менее приводящим в заблуждение, было бы такое: «Для очень коротких интервалов торговли можно исследовать изменение цен активов в течение интервала торговли как будто бы оно нормально распределено». Однако это просто повторяет условия, полученные с помощью оценок (1.11) и (1.21), т. е. для коротких интервалов торговли только первые два момента имеют значение.

Существенные преимущества использования моделей непрерывного времени с динамикой цен, определяемой процессами Ито, достаточно широко продемонстрировано в финансовой экономической литературе, и поэтому здесь сделаем только несколько кратких замечаний.

Например, в решении многопериодной задачи выбора портфеля оптимальные портфельные функции спроса будут зависеть только от двух первых моментов распределений отдачи активов. Это не только значительно сокращает количество информации о распределении отдачи актива, требуемой для выбора оптимального портфеля, но и гарантирует, что условия оптимизации первого уровня линейны по функциям спроса, поэтому явные решения для этих функций могут быть получены простой матричной инверсией.

Анализ задач коллективной ответственности и определения цены опционов также упрощается при использовании леммы Ито, которая обеспечивает прямой метод для получения динамики и переходных вероятностей для функций цен активов. Кроме того, хотя анализ, представленный здесь, справедлив для скалярных процессов, он может быть легко перенесен на векторные процессы.

Конечно, полученные здесь результаты основаны на предположении, что все изменения цен активов являются исходами типа I. Как было сказано в § 1, такой класс процессов – это только подмножество семейства процессов, которые удовлетворяют экономическим предположениям 1.1–1.6. Поэтому для завершения изучения математики моделей непрерывной торговли мы теперь рассмотрим анализ другой составляющей этих процессов, которая учитывает возможность появления «редких событий».

§ 3. ПРОЦЕССЫ С «РЕДКИМИ СОБЫТИЯМИ» И НЕПРЕРЫВНЫМИ ВЫБОРОЧНЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ

Предположим, что исходы $\varepsilon(k)$, $k = 1,..., n$, могут быть или типа I, или типа II, но не типа III. Таким образом, мы учитываем возможность редких событий с исходами типа II, хотя, как показано в § 1, фактически все наблюдения $\varepsilon(k)$ будут исходами типа I.

Структура анализа, представленного здесь, по существу, такая же, как и в предыдущем параграфе. Действительно, основным заключением этого анализа будет то, что при переходе к непрерывной торговле, свойства распределений доходов от активов являются неразличимыми от свойств, полученных в § 2. Другими словами, «редкие события» с исходами типа II «не имеют значения».

Чтобы показать это, мы начнем с доказательства того, что при переходе к непрерывной торговле предельные выборочные траектории для цен активов непрерывны по времени. Для каждого временного периода k определим $r \equiv \min r_j$, когда основной член ε_j имеет порядок h^{r_j}, $j = 1,..., m$. Поскольку все исходы являются исходами или типа I, или типа II, $r > 0$, и $|\varepsilon_j| = O(h^r)$, $j = 1,..., m$.

Утверждение 1.3. Если все возможные исходы для $\varepsilon(k)$, $k = 1,..., n$, являются исходами типа I или типа II, то выборочные траектории цен активов в непрерывном времени будут непрерывными.

Доказательство. Пусть $Q_k(\delta)$ будет условной вероятностью того, что $|X(k) - X(k-1)| \geq \delta$ при знании всей информации, имеющейся до момента времени $k - 1$. Как и в доказательстве утверждения 1.2, необходимым и достаточным условием для непрерывности выборочной траектории X является выполнение равенства $Q_k(\delta) = o(h)$ для каждого $\delta > 0$. Определим $\bar{u} \equiv \max_{\{j\}} |\varepsilon_j| h^{-r}$. По определению r, имеем $\bar{u} = O(1)$. Для каждого числа $\delta > 0$ введем функцию $h^+(\delta)$ как решение уравнения $\delta = \alpha h^+ + \bar{u} (h^+)^r$, где в соответствии с предположением 1.5 $\alpha = O(1)$. Поскольку $r > 0$, а α и $\bar{u}$ имеют порядок $O(1)$, существует решение $h^+(\delta) > 0$ для каждого $\delta > 0$. Поэтому при $h < h^+(\delta)$ и любом возможном исходе $X(k)$ имеет место $|X(k) - X(k-1)| < \delta$. Следовательно, для каждого h, $0 \le h < h^{+}(\delta)$, справедливы равенства $Q_k(\delta) \equiv 0$ и $\lim\,[Q_k(\delta)/h] = 0$ при $h \to 0$.

Установив непрерывность выборочной траектории, покажем, что свойства моментов приращения $X(k) - X(k-1)$ такие же, как и свойства моментов, полученные в § 2. Из предположения 1.5 следует, что $E_{k-1}\{X(k) - X(k-1)\}$ асимптотически пропорционально h, и поэтому таким же является $E_0\{X(k) - X(k-1)\}$. Отсюда из утверждения 1.1 и уравнения (1.5) безусловная дисперсия $X(k) - X(k-1)$ асимптотически пропорциональна h. Поскольку $r > 0$, то N-й безусловный абсолютный момент $\varepsilon\,(k)$ для $2 < N < \infty$ может быть записан в форме

$$E_0\{|\varepsilon\,(k)|^N\} = \sum_1^m p_j \left|\varepsilon_j\right|^N =$$

$$= O\left(\sum_{j=1}^m h^{(N-2)r_j+1}\right) = O(h^{(N-2)r+1}) = o(h), \quad N > 2, \qquad (1.40)$$

где второе равенство следует из уравнения (1.5).

Таким образом, все абсолютные моменты $\varepsilon(k)$ порядка выше, чем второй, асимптотически незначительны по сравнению с первыми двумя моментами. Кроме того, в соответствии с предположением 1.5 те же соотношения порядков получаются как для центральных, так и для нецентральных моментов приращения $X(k) - X(k-1)$.

При условии, что соотношения порядков между безусловными и условными вероятностями остаются теми же, условные моменты приращений $X(k) - X(k-1)$ имеют такие же свойства порядков, как и безусловные моменты, а именно:

$$E_{k-1}\{[X(k) - X(k-1)]^2\} = \sigma_k^2\, h + o(h), \quad k = 1,..., n, \qquad (1.41)$$

где σ_k^2 – условная дисперсия за единицу времени, определенная равенством (1.8), и $\sigma_k^2 > 0$ и $O(1)$.

Тогда

$$E_{k-1}\{[X(k) - X(k-1)]^N\} = o(h) \quad \text{для } N > 2. \qquad (1.42)$$

Следовательно, соотношения между моментами $[X(k) - X(k-1)]$ в рассматриваемом случае идентичны с соотношениями, полученными в § 2, где были возможны исходы только типа I.

Чтобы завершить анализ, исследуем характеристики распределений случайных величин, которые являются функциями цен активов. Пусть $F(t)$ будет случайной величиной, заданной в соответствии с правилом $F(t) = f(X)$, если $X(t) = X$. Заметим, что в отличие от параллельного анализа в § 2 явная зависимость f от t опускается. Это сделано исключительно для того, чтобы оставить и систему обозначений, и анализ относительно простыми. Однако включение явной зависимости от времени не изменяет ни метода получения результатов, ни самих результатов.

Определим K как наименьшее целое число такое, что $Kr \geq 1$. Поскольку $r > 0$, K – конечно. Если f является функцией из C^2 с ограниченной производной $(K + 1)$-го порядка, тогда из теоремы Тейлора, равенств (1.41) и (1.42) имеем, что

$$E_{k-1}\{F(k) - F(k-1)\} =$$

$$= \{f^{(1)}[X(k-1)]\alpha_k + f^{(2)}[X(k-1)]\sigma_k^2/2\}h + o(h) \qquad (1.43)$$

где $f^{(i)}[.]$ обозначает i-ю производную f.

Заметим, что равенство (1.43) идентично соответствующему уравнению (1.17) в § 2, когда f не является явной функцией времени. Кроме того, можно непосредственно показать, что условные моменты разности $F(k) - F(k-1)$ здесь такие же по форме, какие были получены в представлениях (1.20) и (1.21) § 2, а именно:

$$E_{k-1}\{[F(k) - F(k-1)]^2\} = \{f^{(1)}[X(k-1)]\sigma_k\}^2\, h + o(h) \qquad (1.44)$$

и

$$E_{k-1}\{[F(k) - F(k-1)]^N\} = o(h) \quad \text{для } N > 2. \qquad (1.45)$$

Следовательно, соотношения порядков малости для условных моментов $F(k) - F(k-1)$ такие же, как и для условных моментов приращений $X(k) - X(k-1)$. Поэтому непредвиденная составляющая изменения величины F в течение короткого интервала времени будет доминироваться членом $\{f^{(1)}[X(k-1)]\varepsilon(k)\}$ таким же способом, которым он доминировал изменения F в § 2.

Изучив изменение F в течение короткого интервала времени, исследуем стохастические свойства изменения величины F по конечному, а не обязательно по короткому интервалу времени. Для каждого k, $k = 1,..., n$, определим случайные величины $\{y_j(k)\}$ равенствами

$$y_j(k) \equiv f^{(j)}[X(k-1)]\ \{[X(k)-X(k-1)]^j -$$

$$-\ E_{k-1}\{[X(k)-X(k-1)]^j\}\}/j!, \quad j = 2,\dots, K.$$

Далее определим случайную величину $G(t)$:

$$G(k) - G(k-1) \equiv F(k) - F(k-1) - E_{k-1}\{F(k) - F(k-1)\} -$$

$$-\ f^{(1)}[X(k-1)]\varepsilon(k), \qquad k = 1,\dots, n,$$

что может быть переписано с помощью теоремы Тейлора как

$$G(k) - G(k-1) = \sum_{j=2}^{K} y_j(k) + R_{K+1}, \tag{1.46}$$

где R_{K+1} определяется равенством

$$R_{K+1} \equiv f^{(K+1)}[\theta X(k-1) + (1-\theta)X(k)] \times$$

$$\times \{[X(k)-X(k-1)]^{K+1} - E_{k-1}\{[X(k)-X(k-1)]^{K+1}\}\}/(K+1)!$$

для некоторого θ, $0 \le \theta \le 1$. Но $f^{(K+1)}$ ограничена и

$$[\alpha_k h + \varepsilon(k)]^{K+1} = O(h^{r(K+1)})$$

для каждого возможного исхода $\varepsilon(k)$. Отсюда, поскольку $rK > 1$, остаток имеет следующий порядок малости $R_{K+1} = o(h)$. Поэтому (1.46) можно переписать как

$$G(k) - G(k-1) = \sum_{j=2}^{K} y_j(k) + o(h), \quad k = 1,\dots, n. \tag{1.47}$$

Безусловная дисперсия $G(k) - G(k-1)$ с помощью равенства (1.47) может быть записана в виде

$$\operatorname{var}\{G(k) - G(k-1)\} = E_0\left(\sum_{2}^{K}\sum_{2}^{K} y_i(k) y_j(k)\right) + o(h) \le$$

$$\le \sum_{i=2}^{K}\sum_{j=2}^{K} M_i M_j E_0\,|\{[X(k)-X(k-1)]^j - E_{k-1}\{[X(k)-X(k-1)]^j\}\} \times$$

$$\times \{[X(k)-X(k-1)]^i - E_{k-1}\{[X(k)-X(k-1)]^i\}\}|/i!j! + o(h), \tag{1.48}$$

где M_i – наименьшая верхняя граница $|f^{(i)}|$, $i = 2,\dots, K$.

Поэтому из представлений (1.40) и (1.48) имеем, что при $r > 0$

$$\operatorname{var}\{G(k) - G(k-1)\} = O(h^{2r+1}) + o(h) = o(h). \tag{1.49}$$

Для конечного интервала времени [0, T]

$$G(T) - G(0) = \sum_{k=1}^{n}[G(k) - G(k-1)] = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{K} y_j(k) + o(1).$$

Двойная сумма $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{K} y_j(k)$ образует мартингал, и поэтому безусловная дисперсия $G(T) - G(0)$ может быть записана в виде

$$\operatorname{var}\{G(T) - G(0)\} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{var}\{G(k) - G(k-1)\} + o(1). \qquad (1.50)$$

Однако из равенств (1.49) и (1.50) следует, что

$$\operatorname{var}\{G(T) - G(0)\} = O(h^{2r}) + o(1) = o(1), \qquad (1.51)$$

и поэтому при переходе к непрерывной торговле, когда $h \to 0$, дисперсия $G(T) - G(0)$ стремится к нулю для каждого конечного интервала времени [0, T].

Следовательно, для $T > 0$ из соотношений (1.43)–(1.45) и (1.51) имеем, что в пределе, когда $h \to 0$,

$$F(T) - F(0) = \sum_{1}^{n}[F(k) - F(k-1)] =$$

$$= \sum_{1}^{n} \mu_k h + \sum_{k=1}^{n} f^{(1)}[X(k-1)]\varepsilon(k) \qquad (1.52)$$

с вероятностью единица, где μ_k – условное математическое ожидание приращения F за единицу времени, определенное равенством (1.18). Способом, подобным анализу, проведенному в § 2, можно формально выразить предельную сумму в представлении (1.52) как сумму двух интегралов:

$$F(T) - F(0) = \int_{0}^{T} \mu(t)dt + \int_{0}^{T} f^{(1)}[X(t)]\varepsilon(t), \qquad (1.53)$$

где равенство (1.53) имеет место с вероятностью единица.

Как и в соотношении (1.31), стохастический дифференциал для F можно формально определить равенством

$$dF(t) = \mu(t)dt + f^{(1)}[X(t)]\,\varepsilon(t).$$

Кроме того, если марковское предположение (предположение 1.6) имеет место, то предельные переходные вероятности для X удовлетворяют уравнению (1.35). Наконец, хотя условие $[\varepsilon(t)]^2 = O(h)$ не имеет места с вероятностью единица, формальные правила дифференцирования, обеспечиваемые леммой Ито, все еще применимы. Следовательно, при переходе к непрерывной торговле процессы с исходами типа I и типа II неотличимы от процессов с исходами только типа I.

§ 4. ПРОЦЕССЫ С «РЕДКИМИ СОБЫТИЯМИ» И РАЗРЫВНЫМИ ВЫБОРОЧНЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ

Проанализируем общий случай, когда исходы для $\varepsilon(k)$, $k = 1,..., n$, могут быть или типа I, или типа II, или типа III. Как было справедливо для процессов, рассмотренных в § 3, и здесь фактически все наблюдения $\varepsilon(k)$ будут исходами типа I. Однако в отличие от результатов, полученных в § 3, возможность редких событий с исходами типа III «имеет значение». Хотя исходы типа III с их вероятностями, пропорциональными h, «очень редкие» по сравнению с другими допустимыми исходами, величины этих исходов наибольшие. Действительно, поскольку такие исходы имеют порядок $O(1)$, следовательно, значения X могут иметь нелокальные изменения, даже на бесконечно малом интервале времени, и поэтому результирующая выборочная траектория X будет разрывной. Анализ, демонстрирующий это и другие важные свойства, можно упростить, пренебрегая исходами типа II, и в свете результатов, достигнутых в § 3, это упрощение может быть сделано без потери общности.

Утверждение 1.4. Если для $k = 1,..., n$ по крайней мере один возможный исход для $\varepsilon(k)$ является исходом типа III, то выборочная траектория в непрерывном времени для цены актива не будет непрерывной.

Доказательство. Пусть $Q_k(\delta)$ будет условной вероятностью того, что $|X(k) - X(k-1)| \geq \delta$ при знании всей информации до момента времени $k - 1$. Как и в доказательствах утверждений 1.2 и 1.3, необходимым и достаточным условием для непрерывности выборочной траектории X является выполнение равенства $Q_k(\delta) = o(h)$ для каждого $\delta > 0$. Для каждого k будем считать, что случай j обозначает исход типа III для $\varepsilon(k)$, при этом $\varepsilon(k) = \varepsilon_j$ и $\varepsilon_j = O(1)$; в случае необходимости этого можно достичь путем перенумерования. Если p_j является условной вероятностью того, что событие j произошло до момента времени $k-1$, тогда согласно равенству (1.5) вероятность p_j можно записать как $\lambda_j h$, где $\lambda_j = O(1)$. Выберем число θ такое, что $0 < \theta < 1$. Определим h^+ равенствами $h^+ = \infty$, если $\alpha_k \varepsilon_j \geq 0$, и $h^+ = (\theta - 1)\varepsilon_j / \alpha_k$, если $\alpha_k \varepsilon_j < 0$. Заметим, что $h^+ > 0$ независимо от h. Определим $\delta^+ \equiv \theta\,|\varepsilon_j|$. По определению $\delta^+ > 0$ независимо от величины h. Поэтому для всех h таких, что $0 < h \leq h^+$, если $\varepsilon(k) = \varepsilon_j$, справедливо неравенство $|X(k) - X(k-1)| > \delta^+$. Так что для всех h, $0 < h \leq h^+$, и любого значения δ такого, что $0 < \delta \leq \delta^+$, выполняется неравенство $|X(k) - X(k-1)| > \delta$, если $\varepsilon(k) = \varepsilon_j$, и поэтому $Q_k(\delta) \geq \lambda_j h = O(h)$, поскольку $\lambda_j = O(1)$. Следовательно, выборочная траектория не является непрерывной.

Типичная выборочная траектория будет содержать главным образом локальные или непрерывные изменения с нечастыми нелокальными изменениями, или «разрывами», соответствующими относительно редким исходам типа III (рис. 1.2).

Разрывы, характерные для этой выборочной траектории, существенным образом влияют на свойства моментов $X(k) - X(k-1)$. Подобно процессам, рассмотренным в § 2 и 3, первые и вторые безусловные моменты $X(k) - X(k-1)$ асимптотически пропорциональны h. Однако в отличие от процессов тех разделов N-е безусловные абсолютные моменты, $2 < N < \infty$, также асимптотически пропорциональны h. То есть поскольку $r_j = 0$, для всех исходов типа III

$$E_0\{|\varepsilon(k)|^N\} = \sum_{j=1}^{m} p_j \left|\varepsilon_j\right|^N = O\left(\sum_{j=1}^{m} h^{(N-2)r_j+1}\right) = O(h), \quad N > 2,$$

где второе равенство следует из уравнения (1.5). Следовательно, все абсолютные моменты приращения $X(k) - X(k-1)$ имеют одинаковый порядок малости, и тогда ни одним из моментов нельзя пренебрегать даже при переходе к непрерывной торговле. Однако вклад исходов $\varepsilon(k)$ типа I в моменты порядка более высокого, чем второй, будут незначительными. Чтобы показать это, а также получить другие результаты, полезно формально разделить исходы $\varepsilon(k)$ на компоненты по типу I и типу III.

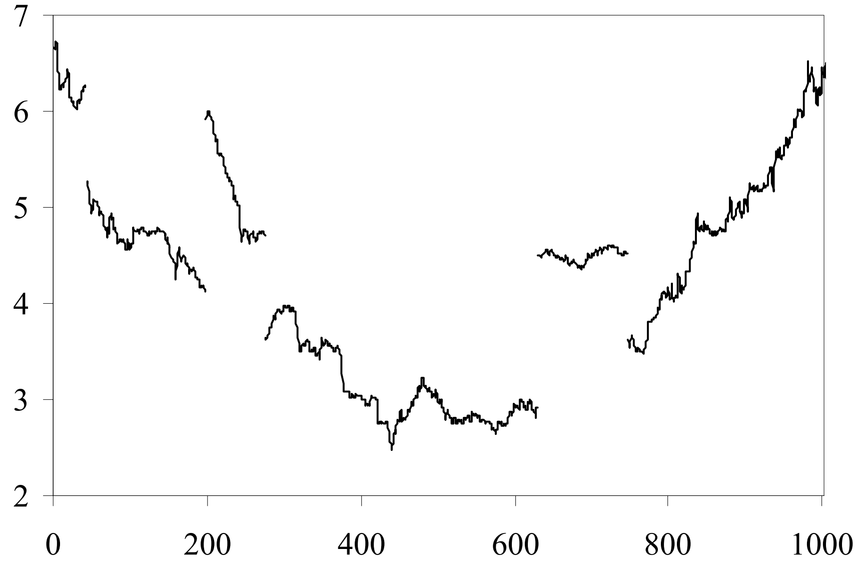

Рис. 1.2. Выборочная траектория непрерывного времени для цены актива с исходами типа I и типа III. Моменты времени, в которые реализуется исход типа III: $k_1 = 42$; $k_2 = 198$; $k_3 = 275$; $k_4 = 629$; $k_5 = 747$

Определим условную случайную величину $u(k)$ с помощью равенства $u(k) \equiv \varepsilon(k)/h^{1/2}$ при условии, что $\varepsilon(k)$ является исходом типа I. Аналогично определим условную случайную величину $y(k)$ равенством $y(k) \equiv \varepsilon(k)$ при условии, что $\varepsilon(k)$ – исход типа III. Если $\lambda(k)h$ обозначает условную вероятность в момент времени $k - 1$ того, что $\varepsilon(k)$ имеет исход типа III, тогда для момента времени $k - 1$ мы можем переписать $\varepsilon(k)$ так:

$$\varepsilon(k) = u(k)\, h^{1/2} \text{ с вероятностью } 1 - \lambda(k)h,$$

$$\varepsilon(k) = y(k) \text{ с вероятностью } \lambda(k)h,$$

и по построению все величины $u(k)$, $y(k)$ и $\lambda(k)$ имеют порядок $O(1)$.

Если E^y_{k-1} обозначает условное математическое ожидание в момент времени $k - 1$ по функции распределения для $y(k)$ и E^u_{k-1} обозначает соответствующее условное математическое ожидание по распределению для $u(k)$, тогда определим

$$\bar{y}(k) \equiv E^y_{k-1}\{y(k)\} = E_{k-1}\{\varepsilon(k) \mid \text{исход типа III}\}$$

и

$$\bar{u}(k)\, h^{1/2} \equiv h^{1/2}\, E^u_{k-1}\{u(k)\} = E_{k-1}\{\varepsilon(k) \mid \text{исход типа I}\}.$$

Поскольку $E_{k-1}\{\varepsilon(k)\} = 0$, непосредственно из свойств условного математического ожидания следует, что

$$\bar{u}\,(k) = -\frac{\lambda(k)\bar{y}(k)h^{1/2}}{1-\lambda(k)h} = -\lambda\,\bar{y}\,h^{1/2} + o(h),$$

где явная зависимость u, y и λ от k опускается всякий раз, когда не возникает неоднозначности относительно момента времени.

Пусть σ_k^2 является условной дисперсией $\varepsilon(k)$ за единицу времени, тогда $E_{k-1}\{\varepsilon^2(k)\} = \sigma_k^2 h$, и из этого следует, что

$$\sigma_u^2 = \frac{\sigma_k^2 - \lambda\sigma_y^2}{1-\lambda h} = \sigma_k^2 - \lambda\sigma_y^2 + O(h),$$

где σ_u^2 является условной дисперсией $u(k)$ и σ_y^2 – условная дисперсия $y(k)$.

Заметим, что σ_k^2, σ_u^2 и σ_y^2 имеют порядок $O(1)$. Далее из этого следует, что для $N > 2$

$$E_{k-1}\{\varepsilon^N(k)\} = \lambda(k)\,E_{k-1}^y\,\{y^N(k)\}h + o(h).$$

Таким образом, хотя исходы как типа I, так и типа III делают существенный вклад в среднее и дисперсию $\varepsilon(k)$, вклад исходов типа I в моменты $\varepsilon(k)$ более высокого порядка асимптотически незначителен.

Завершим анализ рассмотрением характеристик распределений случайных величин, которые являются функциями цен активов. Как и в § 2, предположим, что $F(t)$ является случайной величиной, задаваемой правилом $F(t) = f(X, t)$, если $X(t) = X$, где f является функцией из C^2 с ограниченными третьими частными производными.

Для заданного исхода $y(k) = y$ мы имеем по теореме Тейлора, что

$$f[X(k-1) + \alpha_k h + y, k] = f[X(k-1) + y, k-1] + f_1[X(k-1) +$$

$$+ y, k-1]\,\alpha_k h + f_2[X(k-1) + y, k-1]\,h + o(h), \qquad (1.54)$$

где, как и в § 2, нижние индексы у f обозначают частные производные.

Аналогично для заданного исхода $u(k) = u$

$$f[X(k-1) + \alpha_k h + uh^{1/2}, k] = f[X(k-1), k-1] +$$

$$+ f_1[X(k-1), k-1]\,(\alpha_k h + uh^{1/2}) + f_2[X(k-1), k-1]\,h +$$

$$+ f_{11}[X(k-1), k-1]\,u^2 h/2 + o(h). \qquad (1.55)$$

По свойствам условного математического ожидания из этого следует, что

$$E_{k-1}\{F(k)-F(k-1)\} = \lambda(k)h\,E^{y}_{k-1}\{F(k)-F(k-1)\} +$$

$$+ [1-\lambda(k)h]\,E^{u}_{k-1}\{F(k)-F(k-1)\}. \qquad (1.56)$$

Используя разложения (1.54) и (1.55) в равенстве (1.56) и опуская явное представление членов, которые имеют порядок малости $o(h)$, представление можно переписать (1.56) как

$$E_{k-1}\{F(k)-F(k-1)\} =$$

$$= (f_{11}[X(k-1), k-1]\,\sigma_u^2/2 + f_1[X(k-1), k-1](\alpha_k - \lambda\bar{y}) +$$

$$+ f_2[X(k-1), k-1] + \lambda E^{y}_{k-1}\{f[X(k-1)+y, k-1] -$$

$$- f[X(k-1), k-1]\})\,h + o(h). \qquad (1.57)$$

Если способом, аналогичным использованному при получении равенства (1.18), определить условное математическое ожидание изменения F за единицу времени как $\mu_k \equiv E_{k-1}\{F(k) - F(k-1)\}/h$, тогда посредством деления представления (1.57) на h и вычисления предела при $h \to 0$ можно записать мгновенное математическое ожидание изменения F за единицу времени $\mu(t)$ как

$$\mu(t) = f_{11}[X(t), t]\,\sigma_u^2/2 + f_1[X(t), t][\alpha(t) - \lambda(t)\bar{y}(t)] +$$

$$+ f_2[X(t), t] + \lambda(t)E^{y}_{k-1}\{f[X(t)+y, t] - f[X(t), t]\}. \qquad (1.58)$$

Заметим, что в частном случае, когда $\lambda(t) = 0$ и не имеется никаких исходов типа III, выражение для $\mu(t)$ в (1.58) сводится к соответствующей предельной форме (1.18).

Подобным способом условные моменты изменения F более высоких порядков могут быть записаны как

$$E_{k-1}\{[F(k)-F(k-1)]^2\} = \lambda E^{y}_{k-1}\{f[X(k-1)+y(k), k-1] -$$

$$- f[X(k-1), k-1]\}^2 h + f_1^2[X(k-1), k-1]\,\sigma_u^2 h + o(h)$$

и для $N > 2$

$$E_{k-1}\{[F(k) - F(k-1)]^{N}\} = \lambda E_{k-1}^{y}\{f[X(k-1) + y(k), k-1] -$$

$$- f[X(k-1), k-1]\}^{N} h + o(h).$$

Как и в случае моментов $X(k) - X(k-1)$, все моменты приращений $F(k) - F(k-1)$ имеют такие же порядки малости, и только исходы типа III дают существенный вклад в моменты порядков более высоких, чем второй. Следовательно, при переходе к непрерывной торговле единственными характеристиками $u(k)$, которые имеют значение, являются первые два момента.

Если теперь снова принять предположение 1.6 о том, что случайный процесс $X(t)$ является марковским, то $\lambda(k) = \lambda\,[X(k-1), k-1]$; $\alpha_k = \alpha_k[X(k-1), k-1]$; $\sigma_u^2 = \sigma_u^2\,[X(k-1), k-1]$; $g_k(y)$, условная плотность распределения вероятностей для $y(k)$, может быть записана как $g\,[y(k); X(k-1), k-1]$. Как и в § 2, согласно соотношению (1.34) определим условную плотность вероятности $p(x, t)$ для $X(T) = X$ в момент времени T при условии, что $X(t) = x$. Для фиксированных X и T плотность $p[X(t), t]$ – случайная величина, которая является функцией цены актива в момент времени t. Следовательно, при переходе к непрерывной торговле мгновенное математическое ожидание изменения p за единицу времени удовлетворяет равенству (1.58). Однако поскольку p является плотностью вероятности, математическое ожидание ее изменения равно нулю. Подставив условие $\mu(t) = 0$ в равенство (1.58), получим, что p должно удовлетворять уравнению

$$0 = \sigma_u^2 p_{11}(x, t)/2 + (\alpha - \lambda\bar{y})\,p_1(x, t) + p_2(x, t) +$$

$$+ \lambda\int[p(x+y, t) - p(x, t)]g(y; x, t)dy, \qquad (1.59)$$

т. е. линейному дифференциально-разностному уравнению в частных производных для переходных вероятностей $p\,(x, t)$.

Следовательно, знания функций σ_u^2, α, λ и g достаточно, чтобы определить распределение вероятностей изменения X между любыми двумя датами. Кроме того, с помощью уравнения (1.59) можно показать, что асимптотическое распределение для $X(t)$ идентично асимптотическому распределению случайного процесса, управляемого линейной суперпозицией диффузионного процесса с непрерывной выборочной траекторией и процесса Пуассона. То есть пусть $Q(t + h) - Q(t)$ – случайная величина с распределением Пуассона с характеристическим параметром $\lambda[X(t), t]h$. Определим формально дифференциал $dQ(t)$ как предел разности $Q(t + h) - Q(t)$ при $h \to dt$. Тогда из свойств плотности распределения Пуассона следует, что

$dQ(t) = 0$ с вероятностью $1 - \lambda[X(t), t]\, dt + o(dt)$;
$dQ(t) = 1$ с вероятностью $\lambda[X(t), t]\, dt + o(dt)$;
$dQ(t) = N$ с вероятностью $o(dt)$, $N \geq 2$.

Определим случайный процесс $X_1(t)$ как решение уравнения $dX_1(t) = y\,(t)dQ(t)$, где случайная величина $y(t)$ порядка малости $O(1)$ имеет плотность вероятностей $g[y(t); X(t), t]$. Тогда dX_1 является примером процесса Пуассона. Заметим, что мгновенное математическое ожидание изменения dX_1 равно $\lambda\,\bar{y}\,(t)dt$. Определим второй случайный процесс $X_2(t)$ с помощью уравнения $dX_2(t) = \alpha' dt + \sigma'\, dW$, где dW – винеровский процесс, определенный уравнением (1.37) в § 2. Из уравнения (1.39) следует, что dX_2 является диффузионным процессом с непрерывной выборочной траекторией. Если функция α' выбрана такой, что $\alpha' \equiv \alpha\,[X(t), t] - \lambda\,[X(t), t]\,\bar{y}\,(t)$, а $\sigma' \equiv \sigma_u[X(t), t]$, то согласно уравнению (1.59) предельный процесс изменения X, $dX(t)$ будет идентичен процессу, задаваемому суммой $dX_1(t) + dX_2(t)$.

Следовательно, без потери общности, всегда можно описывать динамику непрерывной торговли $X(t)$ стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t) = \{\alpha\,[X(t), t] - \lambda\,[X(t), t]\,\bar{y}\,(t)\}\, dt +$$
$$+ \sigma\,[X(t), t]\, dW(t) + y(t)dQ(t), \qquad (1.60)$$

где α – мгновенное математическое ожидание изменения X за единицу времени; σ^2 – мгновенная дисперсия изменения X, условная по изменению исходов типа I; λdt – вероятность того, что изменение X за время dt является исходом типа III; $y(t)$ – случайная величина исхода при изменении X, условная по изменению, являющемуся исходом типа III.

Как было показано в § 2, стохастическое дифференциальное уравнение (1.60) фактически определяется стохастическим интегралом $X(T) - X(0) = \int_0^T dX(t)$. Конечно, если $\lambda \equiv 0$ и происходят только исходы типа I, тогда уравнение (1.60) сводится к виду (1.39).

Аналогично можно показать, что представление F в виде стохастического дифференциала может быть написано как

$$dF(t) = \{\sigma^2 f_{11}[X(t), t]/2 + (\alpha - \lambda \bar{y}) f_1[X(t), t] + f_2[X(t), t]\} dt +$$

$$+ \sigma f_1[X(t), t]\, dW(t) + \{f[X(t) + y(t), t] - f[X(t), t]\}\, dQ(t). \quad (1.61)$$

Таким образом, если динамика $X(t)$ может быть описана суперпозицией процесса диффузии и процесса Пуассона, тогда динамика «хороших» функций от $X(t)$ может быть описана таким же образом. Следовательно, равенство (1.61) обеспечивает правило преобразования, соответствующее лемме Ито для чистых диффузионных процессов.

Итак, если экономическая структура, которую требуется проанализировать, такая, что предположения 1.1–1.5 выполняются, тогда в моделях непрерывной торговли динамика цен активов, всегда может быть описана без потери общности «смесью» диффузионных процессов с непрерывными выборочными траекториями и процессами Пуассона. Диффузионная составляющая процесса описывает частые локальные изменения в ценах и в действительности достаточна в структурах, где фазовые переменные не могут изменяться «радикально» за короткий период времени. Пуассоновская составляющая процесса используется, чтобы охватить те редкие события, когда фазовые переменные имеют нелокальные изменения и «скачки» цен активов.

Хотя введение скачкообразной составляющей существенно осложняет выкладки по сравнению со случаем чисто диффузионного процесса, анализ для общей модели непрерывной торговли все-таки намного проще, чем для ее аналога дискретной торговли. Как продемонстрировано в уравнении (1.59), переходные вероятности полностью определяются только четырьмя функциями – α, σ, λ и g. Это упрощает структурный анализ, и делает выполнимым тестирование таких структур модели опытным путем. Поскольку для заданной величины изменения каждая из составляющих имеет различный «масштаб времени», эксперименты можно планировать так, что все эти различные функции могут быть идентифицированы. Например, используя данные временного ряда с очень короткими интервалами времени между наблюдениями, можно идентифицировать любые «нелокальные» изменения наблюдаемых цен как «скачки» и, следовательно, вычислить оценку λ. Аналогично квадраты локальных изменений наблюдаемых цен могут быть использованы для оценки σ^2. Наконец, имея оценки λ и σ^2, можно использовать изменения цен в течение достаточно продолжительного временного периода для оценки α и $\bar{y}$.

ГЛАВА
2

МОДЕЛЬ БЛЭКА – ШОУЛСА И ЕЕ МОДИФИКАЦИИ

§ 1. ФИНАНСОВЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Производной ценной бумаги (*финансовой производной*, *derivative security*, *contingent claim*) называется ЦБ, стоимость которой зависит от стоимости других, лежащих в основе активов. В последние годы производные ЦБ приобретают постоянно растущую важность в финансовой области.

Для того чтобы проиллюстрировать постоянно растущую активность на финансовом рынке, приведем несколько цифр. Крупнейшей биржей, торгующей финансовыми инструментами, является биржа Чикагского управления торговли (CBOT, США). На ней в 1976 г. заключено около 129 тыс. финансовых контрактов и около 19 млн контрактов на сельскохозяйственную и металлургическую продукцию. Через 14 лет, в 1990 г., эти цифры изменились следующим образом: свыше 114 млн финансовых контрактов и около 40 млн контрактов на сельскохозяйственную и металлургическую продукцию. Таким образом, число финансовых контрактов увеличилось почти в 1000 раз, а число контрактов на товарную продукцию только в 2 раза. Что касается финансовых производных, то рост контрактов в этой сфере еще значительнее.

История широкого распространения финансовых производных (ФП) началась с составления в одном из чикагских отелей схемы переводного векселя, который решительно изменил международные финансовые рынки. Переводной вексель был первым в мире *фьючерсным контрактом* (*фьючерсом*, *futures*), который начал продаваться на чикагской бирже CBOT в октябре 1975 г. Менее чем через два года после этого, в августе 1977 г., был запущен фьючерсный контракт на облигации Казначейства США и до конца года продано свыше 22 тыс. таких фьючерсов. В 1990 г. заключено уже 76 млн фьючерсных контрактов. За один только день 9 июня 1989 г. было заключено 704 400 контрактов на общую номинальную стоимость 70 440 млн долл. Все эти цифры являются показателями активности только на одной бирже

CBOT. В апреле 1983 г. CBOT создал Чикагскую биржу торговли опционами (CBOE) с единственной целью торговать опционами на ограниченное число акций Нью-Йоркской фондовой биржи. В 1990 г. на CBOE было продано уже более 28 млн опционных контрактов, что составило по объему продаж около 25 % общего объема CBOT. Эти цифры говорят о том, что созданные финансовые инструменты привлекательны для широкого круга участников финансовых рынков, число которых резко увеличилось. Рассмотрим более детально структуру основных финансовых производных.

Опционы

Торговля *опционами* (*option*) на акции, как было сказано выше, впервые организована на бирже в 1973 г. Лежащими в основе этих ФП активами являются акции, индексы акций, иностранная валюта, долговые инструменты, товары и фьючерсные контракты. Имеются два основных типа опционов. *Опционы-колл* (*call option*) дают право владельцу купить лежащий в основе актив в определенную дату по определенной цене. *Опционы-пут* (*put option*) дают право владельцу продать лежащий в основе актив в определенную дату по определенной цене. Контрактная цена называется *ценой исполнения* (*exercise price*, *strike price*); контрактная дата – *датой истечения* (*expiration date*), *датой исполнения* (*exercise date*) или *погашения* (*maturity*). *Американские опционы* (*American option*) могут быть исполнены в любое время до даты истечения, а *европейские опционы* (*European option*) – только в саму дату истечения. (Заметим, что термины «американские» и «европейские» относятся не к месту заключения контракта или расположению биржи, а определяют тип опциона.) Большинство опционов, которыми торгуют на биржах, – американские. Однако европейские опционы обычно легче анализировать, чем американские, и некоторые свойства американского опциона часто выводятся из свойств его европейского аналога.

Следует подчеркнуть, что опцион дает владельцу право сделать что-то. Владелец не обязан использовать это право. Этот факт отличает опционы от форвардов и фьючерсов, когда владелец обязывается купить или продать лежащий в основе актив. Заметим также, что в то время как при оформлении форвардного или фьючерсного контракта не требуется никаких расходов, чтобы приобрести опционный контракт, инвестор должен заплатить. Существуют две стороны в каждом опционном контракте. С одной стороны имеется инвестор, который занял длинную позицию (т. е. купил опцион), а с другой – инвестор, который занял короткую позицию (т. е. продал или *написал* (*has written*) опцион). Продавец опциона получает деньги сразу, но имеет потенциальные обязательства позже. Его прибыль или потери являются обратными по отношению к тем, которые имеет покупатель опциона.

Часто позиции европейского опциона полезно характеризовать через выплаты инвестору при погашении. При этом начальная стоимость опциона не учитывается при расчетах. Если K является ценой исполнения, а S_T – окончательной ценой лежащего в основе актива, в европейском опционе-колл длинная позиция будет выплачивать сумму $\max(S_T - K, 0)$. Это отражает тот факт, что опцион будет исполнен, если $S_T > K$, и не будет исполнен, если $S_T \le K$. Держателю короткой позиции в европейском опционе-колл выплачивается сумма, равная $-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0)$. Выплата держателю длинной позиции в европейском опционе-пут равна $\max(K - S_T, 0)$.

Другие финансовые производные

В последние годы банки и другие финансовые учреждения были очень изобретательны в создании нестандартных ФП для удовлетворения нужд клиентов. В одних случаях финансовые учреждения продают ФП непосредственно своим клиентам. В других случаях ФП добавляются к выпускам облигаций или акций, чтобы сделать эти выпуски более привлекательными для инвесторов. Некоторые из ЦБ являются просто комбинациями более простых контрактов, таких как форварды или опционы, а другие – более сложными. Возможности для конструирования новых интересных финансовых производных неограничены. Этими проблемами занимается специальный раздел финансового анализа – *финансовая инженерия*. Рекомбинируя существующие рисковые финансовые инструменты, финансовый инженер улучшает конкурентную способность контрактов и приспосабливает их к нуждам конкретных инвесторов.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕН ОПЦИОНОВ. МОДЕЛЬ БЛЭКА – ШОУЛСА.

В своей знаменитой работе Ф. Блэк и М. Шоулс (Black, Scholes, 1973), отмеченной в 1997 г. Нобелевской премией, получили дифференциальное уравнение для цен финансовых производных, зависящих от цены акции, не выплачивающей дивидендов. Основной смысл рассуждений, которые использовали авторы, в том, что составляется безрисковый портфель, содержащий позиции в двух финансовых контрактах: финансовой производной и акции. Затем доход портфеля приравнивается к доходу, получаемому от такой же по величине инвестиции при безрисковой ставке. В модели Блэка – Шоулса портфель остается безрисковым только в течение короткого периода времени. Тем не менее можно доказать, что доход в течение этого короткого временного периода должен быть безрисковой процентной ставкой, если арбитражные возможности отсутствуют. Такой безрисковый портфель можно создать, если и цена акции, и цена финансовой производной подвергаются единственному одному и тому же источнику неопределенности. Это означает, что в течение любого короткого периода времени неопределенности как в цене акции, так и в цене финансовой производной полностью коррелированы. Когда такой портфель из финансовой производной и акции составлен, прибыль (или потери) акции компенсируется потерями (или прибылью) финансовой производной так, что полная стоимость портфеля в конце короткого периода времени достоверно известна.

Перечислим предположения, которые лежат в основе анализа.

1. Торговля активами производится в непрерывном времени.

2. Безрисковая процентная ставка r является постоянной и одинаковой для всех сроков погашения.

3. Цена актива S изменяется во времени случайно, образуя случайный процесс, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dS = \mu\, S\, dt + \sigma\, S\, dW(t)\,,$$

где μ и σ являются постоянными.

4. Не имеется никаких безрисковых арбитражных возможностей.

5. Разрешается короткая продажа активов с использованием выручки в полном объеме, т. е. активы и их финансовые производные свободно продаются и покупаются без ограничений.

6. Не имеется каких-либо расходов на совершение сделок и налоги. Могут продаваться (покупаться) какие угодно доли всех активов.

7. В течение срока действия финансовых производных никакие дивиденды не выплачиваются.

При этих предположениях удается доказать, что стоимость финансовой производной будет зависеть только от цены актива S, времени t и от параметров, которые считаются известными константами.

Тогда, поскольку цена актива S – случайный процесс, цена финансовой производной $f(S, t)$ сама является случайным процессом, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению, определяемому по формуле Ито:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW(t).$$

Разностная версия стохастических уравнений для цен S и f имеет вид

$$\Delta S = \mu\, \Delta t + \sigma\, S \Delta W(t),$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta W(t),$$

где ΔS и Δf – изменения цен S и f через короткий временной интервал Δt.

Напомним, что по предположению, неопределенности в ценах акции и финансовой производной (ФП) порождаются одним и тем же источником случайных возмущений. Формально это означает, что стандартный винеровский процесс $W(t)$ в уравнениях для цен S и f является одним и тем же и $(\Delta W(t))^2 = \Delta t$. Из этого следует, что, составляя портфель из акции и ФП, можно исключить из его стоимости источник неопределенности в виде приращений винеровского процесса. Такой портфель состоит из следующих ЦБ: 1 короткая позиция в контракте ФП и $\partial f / \partial S$ длинных позиций в контракте акции.

По определению стоимость такого портфеля $V = -f + (\partial f / \partial S) S$. Поэтому изменение стоимости V через интервал времени Δt

$$\Delta V = -\Delta f + (\partial f / \partial S) \Delta S.$$

Подставив сюда приращения Δf и ΔS в явном виде, получим следующее выражение для изменения стоимости портфеля:

$$\Delta V = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t.$$

Поскольку это выражение не включает случайных приращений, то в течение времени Δt такой портфель должен быть эквивалентен некоторому безрисковому портфелю. Согласно принятым предположениям, такой портфель в течение времени Δt должен приносить такой же доход, как и краткосрочный актив той же стоимости с безрисковой процентной ставкой. В противном случае был бы возможен арбитраж, т. е. безрисковое получение прибыли. Из этого следует, что для того, чтобы таких возможностей получения безрисковой прибыли не было, изменение стоимости портфеля за короткий промежуток времени Δt должно быть равно процентам краткосрочного безрискового актива такой же стоимости, т. е. $\Delta V = rV\Delta t,$ где r является безрисковой процентной ставкой. Подставляя явные выражения для ΔV и V и сокращая обе части равенства на $\Delta t,$ получаем знаменитое дифференциальное уравнение Блэка – Шоулса для цены финансовой производной:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf.$$

Рассмотрим опцион-колл европейского типа с ценой исполнения K и датой исполнения T на лежащий в основе актив стоимостью $S.$ Как было определено выше, владелец этого опциона в дату T *имеет право* купить одну лежащую в основе контракта акцию по цене K у продавца опциона. Владелец опциона никоим образом *не обязан* покупать эту акцию. Право купить одну лежащую в основе контракта акцию по цене K распространяется только на дату $T.$ Отсюда следует, что опцион имеет смысл исполнять только тогда, когда его стоимость будет неотрицательной, т. е. в дату T стоимость опциона будет равна $f(T) = \max\{S(T) - K, 0\}$. Это равенство следует рассматривать, как граничное условие при решении уравнения Блэка – Шоулса в случае европейского опциона-колл.

Таким образом, разнообразие финансовых производных задает разнообразие граничных условий и, следовательно, формул для определения цен этих финансовых производных. Заметим также, что уравнение Блэка – Шоулса определяет безрисковый портфель только локально, т. е. на очень короткий интервал времени $(t, t + dt)$. Поэтому для того чтобы портфель был безрисковым в течение интервала времени $(t, T),$ необходимо в каждый момент этого интервала модифицировать портфель так, чтобы он содержал $\partial f / \partial S$ длинных позиций на лежащий в основе актив, т. е. число этих позиций должно постоянно модифицироваться, иначе говоря, зависеть от времени.

Теперь получим знаменитую формулу Блэка – Шоулса определения стоимости европейского опциона-колл. Для этого необходимо решить уравнение при граничном условии $f(T) = \max\{S(T) - K, 0\}$. Использовав методы решения уравнений в частных производных, получим

$$f(t) = S(t)\,\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \tag{2.1}$$

где $\Phi(d)$ – функция стандартного нормального распределения, а d_1 и d_2 определяются следующими формулами:

$$d_1 = \frac{\ln[S(t)/K] + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln[S(t)/K] + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Стоимость европейского опциона-пут находим аналогично. В этом случае нам нужно решить уравнение Блэка – Шоулса при несколько другом граничном условии $f(T) = \max\{K - S(T), 0\}$. В этом случае получим

$$f(t) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S(t)\,\Phi(-d_1), \tag{2.2}$$

где используемые в этой формуле обозначения имеют тот же смысл, что и в формуле (2.1).

Таким образом, разработанная Блэком и Шоулсом модель особенно привлекательна тем, что она базируется на общей равновесной постановке задачи и ее конечная формула является функцией «наблюдаемых» переменных.

Несомненная особенность формулы (2.1) в том, что она *не* зависит от ряда параметров. Цена опциона не зависит от ожидаемой доходности на обыкновенную акцию, предпочтений инвесторов или средней массы активов. Это важный результат, поскольку ожидаемая доходность не наблюдается непосредственно, а оценки по прошлым данным обычно неточные из-за нестационарности. Это также подразумевает, что попытки использовать цену опциона ожидаемой доходности акции или рисковых предпочтений инвесторов приводят к ошибкам. Цена опциона зависит от процентной ставки («наблюдаемой») и *полной* дисперсии доходности на обыкновенную акцию, которая часто является стабильным параметром и, следовательно, может быть точно оценена из временных рядов данных.

В большинстве предшествующих работ получали подобные формулы. Однако они были незавершенными, так как включали один или более произвольных параметров. В качестве примера приведем формулу Спренкла для стоимости опциона, которую можно записать так:

$$kS\,\Phi(b_1) - k^*K\Phi(b_2),$$

$$b_1 = \frac{\ln kS/K + 0{,}5\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}, \quad b_2 = \frac{\ln kS/K - 0{,}5\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$$

В этом выражении используются те же обозначения, что и в формуле (2.1), а константы k и k^* являются неизвестными параметрами. К. Спренкл определяет k как отношение ожидаемого значения цены акции в момент погашения опциона к текущей цене акции, а k^* – как дисконтирующий множитель, который зависит от «риска акции». Он пытался оценить значения k и k^* эмпирически, но это оказалось невозможным.

Другая модель, модель Самюэльсона и Мертона (1969), хотя и является очень простой (три актива и один инвестор), но полной. Она основана на общей равновесной формулировке и приводит к формуле

$$f(S,\tau;K) = e^{-r\tau}\int_{K/S}^{\infty}(ZS-K)\,dQ(Z;\tau), \tag{2.3}$$

где Q – функция распределения вероятностей случайной величины Z с математическим ожиданием $e^{r\tau}$, $\tau = T - t$.

Формулы (2.1) и (2.3) будут одинаковыми только в частном случае, когда dQ является логнормальной плотностью с дисперсией $\ln Z$, равной $\sigma^2\tau$. Это встречается только, если: 1) объективные доходы на акцию логнормально распределены; 2) функции полезности инвесторов равномерно эластичны (*iso-elastic*); 3) предложения как опционов, так и облигаций находятся на начальном уровне. Однако Q является отрегулированным риском распределением, зависящим как от рисковых предпочтений, так и от совокупных предложений, в то время как распределение в формуле (2.1) – реальное распределение доходностей на обыкновенную акцию. По мнению Блэка и Шоулса, Самюэльсон и Мертон не получили формулу (2.1) потому, что они не рассматривали других активов.

Вывод формулы (2.1) является интуитивным. Вместе с тем эта формула – очень важный результат, и такой важный результат требует строгого вывода. В таком случае строгий вывод требуется не только для удовлетворения «чистоты», но и для проникновения в суть необходимых условий для получения формулы. Блэк и Шоулс рассматривали только конечные граничные условия, поэтому их анализ строго применим к европейским опционам, хотя можно показать, что стоимость европейского опциона часто совпадает со стоимостью американского. Далее рассмотрим строгий анализ модели Блэка – Шоулса, предложенный Мертоном (1973) и считающийся специалистами в области финансовой экономики основным (в 1997 г. Нобелевская премия по экономике была присуждена и Мертону за этот вывод). Отметим также, что анализ Мертона проводится при несколько отличающихся предположениях, которые можно считать более общими по сравнению с теми, которые использовали Блэк и Шоулс.

§ 3. МОДЕЛЬ БЛЭКА – ШОУЛСА: ВЫВОД МЕРТОНА

Сначала рассмотрим случай европейского опциона, когда не делается никаких платежей по обыкновенной акции в течение действия контракта. Хотя анализ, представленный здесь, основан на предположениях и технических средствах, отличающихся от использованных Блэком и Шоулсом, идея постановки задачи и результаты дают ту же формулу при совпадении предположений. Предположения Мертона следующие.

1. Рынок «*невязкий*» (*frictionless*): нет никаких издержек на совершение сделок или дифференцированные налоги. Торговля осуществляется непрерывно, без ограничений допускаются займы и короткие продажи. Ставки займов и ссуд одинаковы. Предположения неограниченного заимствования и коротких продаж могут быть ослаблены и полученные результаты будут справедливыми при разделении портфелей на два: один содержит обыкновенную акцию, а другой – опцион плюс длинную позицию в облигациях.

2. *Динамика цены акции*: мгновенный доход на обыкновенную акцию описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{dS}{S} = \alpha dt + \sigma dW, \qquad (2.4)$$

где α – мгновенная ожидаемая доходность на обыкновенную акцию, σ^2 – мгновенная дисперсия доходности; W – стандартный винеровский процесс.

Функция дрейфа α может быть стохастической переменной наиболее общего типа, включая зависимость от уровня цены акции или доходностей других активов. Поэтому не делается никаких предположений относительно того, что dS/S – процесс с независимыми приращениями или стационарный, хотя dW им является. Однако σ – нестохастическая и, более того, известная функция времени.

3. *Динамика цены облигации*: $P(\tau)$ определяется как и в предыдущих разделах, и динамика ее доходности описывается уравнением

$$\frac{dP}{P} = \mu(\tau)dt + \delta(\tau)dq(t;\,\tau), \tag{2.5}$$

где μ – мгновенная ожидаемая доходность, δ^2 – мгновенная дисперсия и $q(t;\tau)$ является стандартным винеровским процессом для срока погашения τ.

Допускается возможность влияния временной структуры, но не предполагается, что dq для одного срока погашения полностью коррелировано с dq для другого срока погашения, т. е.

$$dq(t;\,\tau)\;dq(t;\,T) = \rho_{\tau T}\,dt,$$

где $\rho_{\tau T}$ может быть меньше 1 для $\tau \neq T$.

Однако предполагается, что не имеется сериальной корреляции между (непредвидимыми) доходностями на любой из активов, т. е. для любых $s \neq t$

$$dq(s;\,\tau)\;dq(t;\,T) = 0,\;\; dq(s;\,\tau)\;dW(t) = 0,$$

что согласуется с гипотезами Фамы – Самюэльсона для общего эффективного рынка.

Функция дрейфа $\mu(\tau)$ может быть, например, стохастической из-за зависимости от уровня цен облигаций и различной для разных сроков погашения. Из-за того, что $P(\tau)$ является ценой дисконтируемого займа без какого-либо риска дефолта, равенство $P(0) = 1$ достоверно, а $\delta(\tau)$ будет детерминированно зависеть от τ и $\delta\,(0) = 0$. Однако, с другой стороны, δ предполагается нестахостической и независимой от уровня цен P. В частном случае, когда процентная ставка является нестохастической и постоянной в течение времени $\delta \equiv 0$, $\mu = r$, $P(\tau) = e^{-r\tau}$.

Следует заметить, предполагается только, что *непредвиденные* доходности на облигации не являются сериально коррелированными. Так как цены облигаций будут равны их выкупной цене при погашении, полные доходности в течение времени не могут быть некоррелированы. Нельзя никак получить это конкретизацией уравнения (2.5), хотя подразумевается, что дисперсия непредвиденных доходностей должна быть функцией времени до погашения. В качестве примера предположим, что цены облигаций для всех сроков погашения являются функциями только текущей (или будущей) краткосрочной процентной ставки. Далее предположим, что краткосрочная ставка r следует винеровскому процессу с (возможным) дрейфом, т. е. $dr = adt + gdW$, где a и g – константы. Хотя этот процесс нереалистичен, поскольку подразумевает положительную вероятность отрицательных процентных ставок, он может быть взят для иллюстративных целей. Предположим, что все облигации оцениваются так, чтобы дать ожидаемую доходность на следующем периоде равную r (т. е. в форме гипотезы ожидания):

$$P(\tau; r) = \exp\left[-r\tau - \frac{a}{2}\tau^2 + \frac{g^2\tau^3}{6}\right], \quad \frac{dP}{P} = rdt + g\tau dW.$$

По построению dW не является сериально-коррелированным и в обозначениях (2.5) $\delta(\tau) = -g\tau$.

4. *Предпочтения инвестора и ожидания*: не нужно никаких предположений о предпочтениях инвестора, кроме того, что в теории определения рациональной цены опциона необходимо, чтобы цена опциона определялась так, чтобы не было доминирующих ценных бумаг. (*A доминирует* над *B*, если в некоторую известную дату в будущем доходность *A* будет превышать доходность *B* для некоторого возможного состояния среды и будет такой же, как доходность *B* во всех других состояниях среды.)

Все инвесторы согласны со значениями δ и σ и с характеристиками распределений dW, dq. Не предполагается, что они согласны со значениями α и μ. Это предположение гораздо более приемлемо, чем обычное предположение об однородном математическом ожидании. Наиболее разумно ожидать, что инвесторы могут иметь очень разные оценки текущей (или будущей) ожидаемой доходности, вызванные различными уровнями доступной им информации, техники анализа и т. д. Однако большинство аналитиков оценки дисперсий и ковариаций вычисляет путем использования данных о предыдущих ценах. Так как у всех есть доступ к одному и тому же массиву данных о ценах, то разумно предположить, что их оценки дисперсий и ковариаций будут одинаковыми.

На основе предыдущего анализа разумно предположить, что цена опциона является функцией цены акции, цены безрисковой облигации и срока до истечения контракта. Если обозначить функцию цены опциона через $H(S, P, \tau; K)$, тогда при заданных предположениях о распределении S и P по формуле Ито можем вывести, что изменение цены опциона во времени удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dH = H_1 dS + H_2 dP + H_3 d\tau + \\ + [H_{11}(dS)^2 + H_{22}(dP)^2 + 2H_{12}(dS\, dP)]/2, \tag{2.6}$$

где нижними индексами для краткости обозначены частные производные по первым двум переменным и $(dS)^2 \equiv \sigma^2 S^2 dt$, $(dP)^2 \equiv \delta^2 P^2 dt$, $d\tau = -\, dt$, $(dS\, dP) \equiv \rho\sigma\delta\, SPdt$, а ρ является мгновенным коэффициентом корреляции между (непредвиденными) доходностями на акцию и облигацию.

Используя уравнения (2.4) и (2.5) и преобразовывая получающееся выражение, уравнение (2.6) можно переписать в форме

$$dH = \beta H dt + \gamma H dW + \eta H dq, \tag{2.7}$$

где мгновенная ожидаемая доходность на опцион

$$\beta = [\sigma^2 S^2 H_{11}/2 + \rho\sigma\delta\, SPH_{12} + \delta^2 P^2 H_{22}/2 + \alpha\, S\, H_1 + \mu\, PH_2 - H_3]\, /H,$$

$$\gamma \equiv \sigma\, SH_1/H \;\text{ и }\; \eta \equiv \delta\, PH_2/H.$$

Следуя формулировке Блэка – Шоулса, рассмотрим портфель, содержащий обыкновенную акцию, опцион и безрисковые облигации со сроком до погашения τ, равным сроку истечения опциона, полагая, что совокупная инвестиция в портфель равна нулю. Это достигается путем использования процесса коротких продаж и займов для финансирования длинной позиции. Пусть V_1 будет (мгновенным) количеством денег портфеля, инвестированных в обыкновенную акцию, V_2 – количество денег, инвестированных в опцион, и V_3 – количество денег, инвестированных в облигацию. Тогда условие нулевой совокупной инвестиции можно записать как $V_1 + V_2 + V_3 = 0$. Если dY является мгновенной денежной доходностью портфеля, можно показать, что

$$dY = V_1 \frac{dS}{S} + V_2 \frac{dH}{H} + V_3 \frac{dP}{P} = [V_1(\alpha - \mu) + V_2(\beta - \mu)]dt +$$

$$+ [V_1\sigma + V_2\gamma]dW + [V_2\eta - (V_1 + V_2)\delta]dq\,, \qquad (2.8)$$

где $V_3 = -(V_1 + V_2)$ в принципе можно исключить.

Предположим, что стратегия $V_j = V_j{}^*$ может быть такой, что коэффициенты при dW и dq в уравнении (2.8) будут всегда равны нулю. Тогда долларовая доходность портфеля dY^* будет нестохастической. Так как портфель предполагает нулевую инвестицию, он должен быть таким, чтобы избегать *арбитражной* доходности, и ожидаемая доходность на портфель при этой стратегии равна нулю. Термин *арбитраж* используется в том смысле, что предположения о распределении и другие предположения известны и выполняются достоверно. Более слабая форма говорит: если доходность портфеля нулевая, то или опцион или обыкновенная акция была бы доминирующей ценной бумагой. Два портфельных условия и условие равновесия приводят к линейной системе трех уравнений относительно двух переменных:

$$V_1{}^*(\alpha - \mu) + V_2{}^*(\beta - \mu) = 0, \;\; V_1{}^*\sigma + V_2{}^*\gamma = 0,$$

$$-V_1{}^*\delta + V_2{}^*(\eta - \delta) = 0. \qquad (2.9)$$

Нетривиальное решение системы (2.9) существует, если и только если

$$\frac{\beta - \mu}{\alpha - \mu} = \frac{\gamma}{\sigma} = \frac{\delta - \eta}{\delta}. \qquad (2.10)$$

Согласно нашим предположениям, α, σ, δ, μ и σ являются экзогенными параметрами модели (по отношению к цене опциона), а β, γ и η должны определяться так, чтобы избежать доминирования любой из трех ЦБ. Если соотношение (2.10) имеет место, тогда $\gamma / \sigma = 1 - \eta / \delta$, что согласно определению γ и уравнению (2.7) подразумевает, что

$$\frac{SH_1}{H} = 1 - \frac{PH_2}{H}, \;\; \text{или} \;\; H = SH_1 + PH_2. \qquad (2.11)$$

Хотя по теореме Эйлера это не является достаточным условием, равенство (2.11) – необходимое условие, чтобы H была однородной функцией первой степени относительно (S, P).

Второе равенство (2.10) записывается как $\beta - \mu = \gamma(\alpha - \mu) / \sigma$, которое согласно определению β и γ в уравнении (2.7) приводит к выражению

$$\sigma^2 S^2 H_{11}/2 + \rho\sigma\delta SPH_{12} + \delta^2 P^2 H_{22}/2 +$$

$$+ \alpha SH_1 + \mu PH_2 - H_3 - \mu H = SH_1(\alpha - \mu),$$

что путем перестановки слагаемых можно записать как соотношение

$$\sigma^2 S^2 H_{11}/2 + \rho\sigma\delta SPH_{12} + \delta^2 P^2 H_{22}/2 +$$

$$+ \mu SH_1 + \mu PH_2 - H_3 - \mu H = 0. \tag{2.12}$$

Используя равенство (2.11) в соотношении (2.12), последнее можно переписать как уравнение

$$[\sigma^2 S^2 H_{11} + 2\rho\sigma\delta SPH_{12} + \delta^2 P^2 H_{22}]/2 - H_3 = 0, \tag{2.13}$$

которое является линейным уравнением в частных производных параболического типа второго порядка.

Если H – стоимость европейского опциона, тогда H должно удовлетворять уравнению (2.13) при следующих граничных условиях:

$$H(0, P, \tau; K) = 0, \tag{2.14}$$

$$H(S, 1, 0; K) = \max[0, S - K], \tag{2.15}$$

так как по предположению $P(0) = 1$.

Определим переменную $x \equiv S/KP(\tau)$, которая является ценой на долю акционерного капитала в единицах исполнения платежа в фиксированную дату в будущем (в дату истечения опциона). Переменная x является вполне определенной ценой при $\tau \geq 0$, и из уравнений (2.4), (2.5) и формулы Ито динамика переменной x описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{x} = [\alpha - \mu + \delta^2 - \rho\sigma\delta]dt + \sigma dW + \delta dq.$$

Из этого уравнения ожидаемая доходность на x будет функцией S, P и так далее через α и μ, а мгновенная дисперсия $V^2(\tau)$ доходности инвестиции x будет равна $\sigma^2 + \delta^2 - 2\rho\sigma\delta$ и будет зависеть только от τ.

Мотивируя возможной однородностью свойств H, попробуем ввести переменную $h(x, \tau; K) = H(S, P, \tau; K) / KP$, где h предполагается независимой от P и является ценой опциона, измеряемой в тех же единицах, что и x. Подстановка (h, x) вместо (H, S) в равенства (2.13) – (2.15) приводит к дифференциальному уравнению в частных производных для h

$$V^2x^2 h_{11}/2 - h_2 = 0 \qquad (2.16)$$

с граничными условиями $h(0, \tau; K) = 0$ и $h(x, 0; K) = \max[0, x - 1]$.

Из уравнения (2.16) и его граничных условий следует, что h является функцией только x и τ, так как V^2 – функция только τ. Отсюда вытекает принятое свойство однородности H. Далее, поскольку h не зависит от K, то H действительно однородная функция первой степени относительно $[S, KP(\tau)]$.

Рассмотрим новую временную переменную $T = \int_0^\tau V^2(s)ds$. Если мы определим функцию $y(x, T) \equiv h(x, \tau)$ и подставим ее в (2.16), тогда она должна удовлетворять уравнению

$$x^2 y_{11}/2 - y_2 = 0 \qquad (2.17)$$

с граничными условиями $y(0, T) = 0$ и $y(x, 0) = \max[0, x - 1]$. Предположим, что мы установили цену опциона в ее «полной функциональной форме» $H(S, P, \tau; K, \sigma^2, \delta^2, \rho)$. Тогда

$$y = H(x, 1, T; 1, 1, 0, 0)$$

и является ценой опциона за T лет до его истечения с ценой исполнения, равной одной денежной единице на акцию с единичной мгновенной дисперсией доходности, когда рыночная процентная ставка равна нулю в течение действия контракта.

Как только мы решим уравнение (2.17) для цены этого «стандартного» опциона, то путем замены переменных получим цену любого европейского опциона:

$$H(S, P, \tau; K) = KP(\tau)\, y\left[\frac{S}{KP(\tau)}, \int_0^\tau V^2(s)ds\right]. \qquad (2.18)$$

Отсюда для эмпирического применения нужно вычислить только таблицы цен «стандартных» опционов как функции двух переменных, цены акции и времени до истечения, чтобы вычислять цены опционов в общем случае.

Чтобы решить уравнение (2.17), преобразуем его к стандартной форме заменой переменных $Z = \ln x + T/2$ и $\phi\,(Z, T) \equiv y\,(x, T)/x$, а затем, подставив результат в уравнение (2.17), получим

$$0 = \phi_{11}/2 - \phi_2 \tag{2.19}$$

с граничными условиями: $|\phi\,(Z, T)| \le 1$ и $\phi\,(Z, 0) = \max\,[0, 1 - e^{-Z}]$.

Уравнение (2.19) является стандартной задачей со свободными границами, которая решается методом разделения переменных или с помощью преобразований Фурье. Его решение имеет вид

$$y(x, T) = x\phi(Z, T) = [x\,\mathrm{erfc}(h_1) - \mathrm{erfc}(h_2)]\,/\,2, \tag{2.20}$$

где $\mathrm{erfc}(h)$ – обозначение дополнения к известной специальной функции ошибок $\mathrm{erf}(h)$: $\mathrm{erfc}(h) = 1 - \mathrm{erf}(h) = 1 - \sqrt{\frac{2}{h}}\int_{-\infty}^{h} e^{-t^2}\,dt = 1 - \Phi(h\sqrt{2})$; $h_1 = -\,[\ln x + T/2]\,/\sqrt{2T}$, а $h_2 = -\,[\ln x - T/2]\,/\sqrt{2T}$.

Равенство (2.20) совпадает с уравнением (2.1) при $r = 0$, $\sigma^2 = 1$ и $K = 1$. Поэтому (2.18) будет идентично равенству (2.1), являющемуся формулой Блэка – Шоулса в частном случае нестохастической и постоянной процентной ставки (т. е. $\delta = 0$, $\mu = r$, $P = e^{-r\tau}$ и $T = \sigma^2\tau$).

Уравнение (2.17) точно соответствует уравнению Самюэльсона для цены опциона в его «линейной» модели, когда цена акции логнормально распределена с параметрами $\alpha = \beta = 0$ и $\sigma^2 = 1$. Отсюда процедура, определяемая формулой (2.20), может быть использована вместе с выражением (2.18) для проведения вычислений по формуле Самюэльсона, если вместо $P(\tau)$ в выражение (2.18) подставить $e^{-\alpha\tau}$. Так как в его теории α – математическое ожидание доходности на рисковый актив, следует ожидать, что $e^{-\alpha\tau} < P(\tau)$. Это неравенство влечет, что прогнозируемые стоимости опционов в теории Самюэльсона будут выше, чем прогнозируемые цены теории Блэка – Шоулса или рассматриваемой здесь модели, что вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2.1. Для данной цены акции цена опциона является невозрастающей функцией $P(\tau)$ и, следовательно, неубывающей функцией τ-летней процентной ставки.

Доказательство. Первое следует непосредственно из утверждения, так как рост по P эквивалентен росту по K, что никогда не увеличивает стоимости опциона. Формально H есть выпуклая функция S, проходящая через начало координат. Откуда $H - SH_1 \leq 0$. Но из равенства (2.11) $H - SH_1 = PH_2$, поэтому $P \geq 0$ и $H_2 \leq 0$. Наконец, по определению $P(\tau)$ является убывающей функцией τ-летней процентной ставки.

Поскольку мы применили к уравнению (2.13) только граничные условия на конце траектории, то цена опциона получена для европейского опциона. Точные граничные условия для американского опциона включали бы неравенство арбитражной границы

$$H(S, P, \tau; K) \geq \max\,[0, S - K].$$

Так как предполагается, что никаких дивидендов не выплачивается и изменения цены исполнения не происходит в течение времени действия контракта, естественно, что если формулировка нашей задачи лежит в рамках рациональной теории, тогда цена опциона будет удовлетворять более строгому неравенству $H \geq \max\,[0, S - KP(\tau)]$, которое однородно по S и $KP(\tau)$, и американский опцион будет иметь ту же стоимость, что и его европейский эквивалент. Можно показать, что решения уравнений в виде (2.1) и (2.20) всегда будут иметь значения такого же порядка, что и $\max\,[0, S - K]$; Самюэльсон и Мертон доказали это при более общих условиях. Следовательно, для формальной проверки здесь нет необходимости.

Прямым результатом одинаковых стоимостей европейского и американского опционов будет следующее.

Теорема 2.2. Цена опциона является неубывающей функцией дисперсии доходности акции.

Доказательство. Согласно выражению (2.18), изменение цены H относительно дисперсии будет пропорционально y_2. Но y является ценой американского опциона и, следовательно, должна быть неубывающей функцией времени до истечения, т. е. $y_2 \geq 0$.

Фактически теорема 2.2 – частный случай более общего утверждения: цена опциона, определяемая рационально, является неубывающей функцией рискованности связанной с ним обыкновенной акции. Однако в общем случае увеличение дисперсии не обязательно ведет к увеличению риска, но в данном случае справедливо, что дисперсия – обоснованная мера риска для этой модели.

Для того чтобы доказать, что дисперсия – состоятельная мера риска в модели Блэка – Шоулса, используем эквивалентное альтернативное определение (Ротшильд и Стиглиц) большей рискованности: X является более рискованным, чем Y, если при $E[X] = E[Y]$ для любой вогнутой функции полезности U имеет место $EU(X) \le EU(Y)$.

Так как формула Блэка – Шоулса (2.1) для цены опциона не зависит от ожидаемой доходности на акцию и доходность акции предполагается логнормально распределенной, другие ценные бумаги различаются единственным параметром σ^2. Поэтому без потери общности можно принимать, что $\alpha = 0$, и доказать результат посредством того, что для всякой вогнутой функции U математическое ожидание $EU(Z)$ является убывающей функцией σ, а Z – логнормальная случайная величина с $E(Z) = 1$ и дисперсией $\ln(Z)$, равной σ^2.

$$EU(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{\infty} U(Z) \exp\left\{ -\left[\ln Z + \frac{\sigma^2}{2} \right]^2 \Big/ 2\sigma^2 \right\} \frac{dZ}{Z} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U\left(\exp\left\{ \sigma x - \frac{\sigma^2}{2} \right\} \right) \exp\left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} dx\,;$$

(после замены переменной $x \equiv \left(\ln Z + \frac{\sigma^2}{2} \right) \Big/ \sigma$).

$$\frac{\partial EU(Z)}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial U}{\partial \sigma} \exp\left\{ -\frac{(x-\sigma)^2}{2} \right\} (x-\sigma) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial U(e^{\sigma y + \sigma^2/2})}{\partial \sigma} y e^{-y^2/2} dy \equiv \mathrm{Cov}\left[\frac{\partial U(e^{\sigma y + \sigma^2/2})}{\partial \sigma},\ y \right].$$

Однако $U'(y)$ является убывающей функцией y из-за вогнутости функции U. Следовательно, по теореме Харди $\mathrm{cov}[U', y] < 0$. Поэтому $\partial EU / \partial \sigma < 0$ для всех вогнутых функций U.

Мы получили формулу (2.1) для определения цены опциона строго при предположениях более слабых, чем постулировали Блэк и Шоулс, и распространили анализ на случай возможности стохастических процентных ставок.

Поскольку Блэк и Шоулс предполагали постоянными процентные ставки при формировании своих позиций хеджирования, было неясно, нужно ли занимать или ссужать деньги на длинные или короткие сроки погашения. Вывод, представленный здесь, ясно демонстрирует, что корректным сроком погашения при хеджировании является тот, который совпадает с датой погашения опциона. Термин «корректный» используется здесь в том смысле, что если цена облигации $P(\tau)$ остается фиксированной, в то время как цена активов с другими сроками погашения изменяется, цена τ-летнего опциона будет оставаться неизменной.

Модель определения цен активов, основанная на рассмотрении капитала (CAPM, *Capital Asset Pricing Model*), является достаточной для получения формулы Блэка – Шоулса. В то время как предположения этого параграфа необходимы для межвременного использования CAPM, они не достаточны. Например, мы не предполагали, что процентные ставки являются нестохастическими, что динамика цен – стационарна и что инвесторы имеют однородные ожидания. Все это требуется для CAPM. Далее, рассматривая только свойства трех ЦБ, мы не предполагали, что рынок капитала находится в насыщенном общем равновесии. Так как окончательная формула не зависит от α или μ, она будет справедлива, даже если наблюдаемые цены акций или облигаций оказываются переходными неравновесными ценами.

Основой для вывода является то, что доходность любой одной ЦБ во времени может быть полностью воспроизводимой с помощью непрерывно модифицируемого портфеля комбинаций из двух других. Полный анализ потребовал бы, чтобы цены всех трех активов определялись одновременно, что в общем случае потребовало бы проверки цен всех других активов, знание предпочтений и т. п. Однако из-за «полной взаимозаменяемости» активов и допустимости необходимых предположений влияние рыночного предложения может быть незначительным, и мы можем применить анализ «частичного равновесия», приводящий к формуле для цены опциона как функции цен акции и облигации.

Эта «полная взаимозаменяемость» обыкновенной акции, займа и опциона или опциона и ссуды для обыкновенной акции объясняет, почему формула не зависит от ожидаемой доходности на обыкновенную акцию или предпочтений инвесторов. Ожидаемая доходность на обыкновенную акцию и предпочтения инвесторов будут влиять на то, сколько капитала инвестировать (на длинной или короткой позиции) в данную компанию. Решение, занимать ли позицию путем приобретения опциона или путем увеличения подъемной силы акции, зависит только от их относительных цен и расходов на займы. С точки зрения модели Блэка – Шоулса аргумент подобен межвременной теореме Модиглиани – Миллера. Причина, по которой предположения Блэка – Шоулса из CAPM приводят к корректной формуле, состоит в том, что поскольку модель равновесная, она обязательно должна приводить к прибыли с применением полностью коррелированных ценных бумаг, о чем явно говорит условие (2.10).

Предположения, приведенные в этом параграфе, необходимы для того, чтобы имели место формулы (2.18) и (2.20). Предположение о непрерывной торговле необходимо для установления полной корреляции между нелинейными функциями, которая требуется для образования состава портфеля «полного хеджирования». Модель Самюэльсона и Мертона является непосредственным контрпримером для проверки законности формулы торговли через дискретные интервалы.

Предположение о процессе Ито для динамики доходности активов было необходимо, чтобы применить формулу Ито. Дальнейшее ограничение, что σ и δ нестохастические и независимые от уровней цен, требуется для того, чтобы изменение цены опциона вызывалось только изменениями цен акции или облигации. Это необходимо для установления полного хеджирования и свойства однородности (2.11). Очевидно, если инвесторы не соглашаются на величину $V^2(\tau)$, то другие стоимости тех же опционов их могли бы устроить.

Требование Блэка и Шоулса, чтобы выражения (2.1) и (2.18) были бы единственными формулами, согласованными с рынком капитала, является несколько сильным. Неверно, что если рыночные цены опционов различны, тогда гарантируется арбитражная прибыль. Если предположения рациональной теории определения цен опционов выполняются с достоверностью, тогда формула Блэка – Шоулса является просто формулой, с которой согласны все инвесторы, и никто не смог бы доказать, что они заблуждаются.

Таким образом, модель Блэка – Шоулса может быть получена на основе более слабых предположений, чем это было сделано в их первоначальной постановке. Главные преимущества такой модификации: 1) вывод основан на относительно слабом условии отсутствия доминирования; 2) конечная формула является функцией наблюдаемых переменных; 3) модель естественным образом распространяется на случай определения рациональной цены любых типов опционов. Модель можно применять при эмпирических исследованиях рынка опционов.

При некоторых предположениях модель может быть использована для определения цен различных элементов структуры капитала фирм. По существу, при условиях, когда справедлива теорема Модильяни – Миллера, полную стоимость фирмы можно рассматривать как основной актив (заменяя им обыкновенную акцию в формулировке модели), а отдельные ценные бумаги внутри структуры капитала фирмы (например, долг, конвертируемые облигации, обыкновенные акции и т. д.) – как опционы или случайные иски на капитал фирмы, и определять их цены соответствующим образом. Например, можно получить систематическим образом рисковую структуру процентных ставок как функцию отношения задолженности к собственному капиталу (*debt-equity*), рисковый класс фирмы, безрисковые (через дефолт) долговые ставки.

Используя описанный здесь метод, можно разработать теорию временной структуры процентных ставок. Подход может быть применен и к теории спекулятивных рынков.

§ 4. РАСПОСТРАНЕНИЕ МОДЕЛИ БЛЭКА – ШОУЛСА НА СЛУЧАЙ ВЫПЛАТЫ ДИВИДЕНДОВ И ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕНЫ ИСПОЛНЕНИЯ

Для того чтобы анализировать влияние дивидендов на незащищенный опцион, полезно предположить, что процентная ставка r является постоянной и известной. При этих предположениях $\delta = 0$, $\mu = r$ и $P(\tau) = e^{-r\tau}$. Условие (2.10) упрощается к виду

$$\beta - r = \gamma(\alpha - r)/\sigma. \qquad (2.21)$$

Пусть $D(S, \tau)$ будет дивидендом на долю акционерного капитала за единицу времени, когда цена акции равна S и срок до истечения опциона равен τ. Если α является мгновенной полной ожидаемой доходностью, как она определяется формулой (2.4), то мгновенная ожидаемая доходность от повышения цены равна $[\alpha - D(S, \tau)/S]$. Поскольку $P(\tau)$ больше не является стохастической, мы ее опустим, и будем записывать функцию цены опциона как $W(S, \tau; K)$. Как мы уже делали в уравнениях (2.6) и (2.7), используем формулу Ито для вывода стохастического дифференциального уравнения для цены опциона:

$$dW = W_1(dS - D(S, \tau)\,dt) + W_2\,dt + W_{11}(dS)^2/2 =$$
$$= [\sigma^2 S^2 W_{11}/2 + (\alpha S - D)W_1 - W_2]\,dt + \sigma S W_1 dw/2. \qquad (2.22)$$

Поскольку владелец опциона не различает частей дивидендного дохода, он считает, что часть ожидаемого денежного дохода на обыкновенную акцию обязана повышению цены. Из уравнения (2.22) и определения β и γ имеем

$$\beta W = \sigma^2 S^2 W_{11}/2 + (\alpha S - D)\, W_1 - W_2, \quad \gamma W = \sigma S W_1. \tag{2.23}$$

Применив равенство (2.21) в (2.23), получим уравнение в частных производных для цены опциона

$$\sigma^2 S^2 W_{11}/2 + (r\, S - D)\, W_1 - W_2 - r\, W = 0 \tag{2.24}$$

с граничными условиями $W(0, \tau; K) = 0$, $W(S, 0; K) = \max\,[0, S - K]$ для европейского опциона и дополнительное арбитражное граничное условие для американского опциона: $W(S, \tau; K) \geq \max\,[0, S - K]$.

Уравнение (2.24) не будет иметь простого решения даже для европейского опциона и относительно простого функционального выражения для D. При определении стоимости американского опциона в случае отсутствия дивидендов ($D = 0$) арбитражное граничное неравенство не используется явно для получения решения, поскольку было показано, что цена европейского опциона нигде не нарушает неравенство, и цены европейского и американского опционов будут равны. Для многих дивидендных стратегий решение для цены европейского опциона будет нарушать неравенство, и для таких стратегий вероятность досрочного исполнения американского опциона будет положительной. Чтобы получить корректное значение стоимости американского опциона из уравнения (2.24), нужно рассмотреть граничное неравенство явно и преобразовать его в удобную для решения форму.

Если существует положительная вероятность досрочного исполнения, тогда для любого τ существует уровень цены акции $C(\tau)$ такой, что для всех $S > C(\tau)$ исполнение опциона приводило бы к большей выгоде, чем обладание им. Так как стоимость исполняемого опциона всегда равна $(S - K)$, дополнительное граничное условие для уравнения (2.24)

$$W(C(\tau), \tau; K) = C(\tau) - K, \tag{2.25}$$

где W удовлетворяет уравнению (2.24) для $0 \leq S \leq C(\tau)$.

Если $C(\tau)$ будет известной функцией, тогда после соответствующей замены переменных уравнение (2.24) с европейскими граничными условиями и дополнением (2.25) было бы задачей с полубесконечным граничным условием и границей, зависящей от времени. Однако $C(\tau)$ неизвестна и должна определяться при решении. Поэтому требуется дополнительное граничное условие для того, чтобы хорошо поставить задачу.

К счастью, экономика задачи достаточно богата, чтобы обеспечить это дополнительное условие. Поскольку владелец опциона не обязан исполнять свой опцион досрочно, он будет это делать только в собственных интересах (т. е. когда исполнение опциона дает больше, чем владение им). Следовательно, единственным рациональным выбором для $C(\tau)$ является зависящая от времени функция, которая максимизирует стоимость опциона. Пусть $f(S, \tau; K, C(\tau))$ будет решением уравнений (2.24), (2.25) для данной функции $C(\tau)$. Тогда стоимость τ-годичного американского опциона

$$W(S, \tau; K) = \max_{\{C\}} f(S, \tau; K, C). \tag{2.26}$$

Далее из структуры задачи выясняется, что оптимальная $C(\tau)$ будет независимой от текущего уровня цены акции. При анализе этой трудной задачи Самюэльсон постулировал, что на границе было нужно дополнительное условие сшивания, т. е.

$$W_1(C(\tau), \tau; K) = 1. \tag{2.27}$$

Можно показать, что условие (2.27) вытекает из максимизации поведения, описываемого соотношением (2.26). Действительно, пусть функция $f(x, c)$ будет дифференцируемой, вогнутой по второму аргументу, $0 \le x \le c$. Потребуем, чтобы $f(c, c) = h(c)$ являлась дифференцируемой функцией c. Пусть $c = c^*$ будет значением c, которое максимизирует f, т. е. $f_2(x, c^*) = 0$. Рассмотрим полную производную f по c вдоль границы $x = c$. Тогда

$$\frac{df}{dc} = \frac{dh}{dc} = f_1(c, c) + f_2(c, c).$$

Для $c = c^*$ $f_2 = 0$. Следовательно, $f_1(c^*, c^*) = dh/dc$. В рассматриваемом случае $h = c - K$ и условие сшивания $f_1(c^*, c^*) = 1$ доказано. Таким образом, корректным определением цены американского опциона является уравнение (2.24) с европейскими граничными условиями плюс условия (2.25) и (2.27).

Самюэльсон и Мертон показали, что для пропорциональной дивидендной стратегии, когда $D(S, \tau) = \rho S$, $\rho > 0$, всегда имеется положительная вероятность досрочного исполнения и, следовательно, арбитражное граничное условие будет обязательным для достаточно больших цен акций. Например, для $D(S, \tau) = \rho S$ решение уравнения (2.24) для европейского опциона имеет вид

$$W = [Se^{-\rho\tau}\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)],$$

где Φ, d_1 и d_2 определены так же, как в (2.1).

Для больших S имеем аппроксимацию $W \approx Se^{-\rho\tau} - Ke^{-r\tau}$, что меньше, чем $(S - K)$ для больших S и $\rho > 0$. Поэтому исполнение американского опциона может быть более ценным, чем владение им. Если $D(S, \tau) = \rho S$, тогда уравнение (2.24) с математической точки зрения идентично «нелинейному» ($\beta > \alpha$) случаю модели Самюэльсона, когда в ней $\beta = r$ и $\alpha = r - \rho$.

Самюэльсон и МакКин проанализировали этот случай очень подробно. Хотя не имеется простых явных решений для опционов с конечным сроком исполнения, они получены для бессрочных опционов в форме степенных функций, касательных к линии $(S - K)$ при конечном значении S.

Второй пример простой дивидендной стратегии – постоянная стратегия, когда $D = d$, d – константа. В отличие от предыдущей пропорциональной стратегии, досрочное исполнение может или не может встретиться в зависимости от значений d, r, K и τ. В частности, достаточным условием для того, чтобы досрочное исполнение не встретилось, является условие $K > d/r$. Если оно выполняется, тогда решение для цены европейского опциона будет им и для американского опциона. Для конечных τ решение в явной форме все-таки не получается; а для бессрочного опциона при $K > d/r$ его можно получить так. Сделаем замену переменных: $Z \equiv \delta / S$ и $h(Z) \equiv \exp(Z)\, Z^{-\gamma}\, W$, где $\delta \equiv 2d/\sigma^2$ и $\gamma \equiv 2r/\sigma^2$. Тогда после подстановки в уравнение (2.24) получим для h дифференциальное уравнение

$$Zh'' + (\gamma + 2 - Z)\, h' - 2h = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$h = c_1 M(2, 2 + \gamma, Z) + c_2 Z^{-(\gamma+1)} M(1 - \gamma, -\gamma, Z)$$

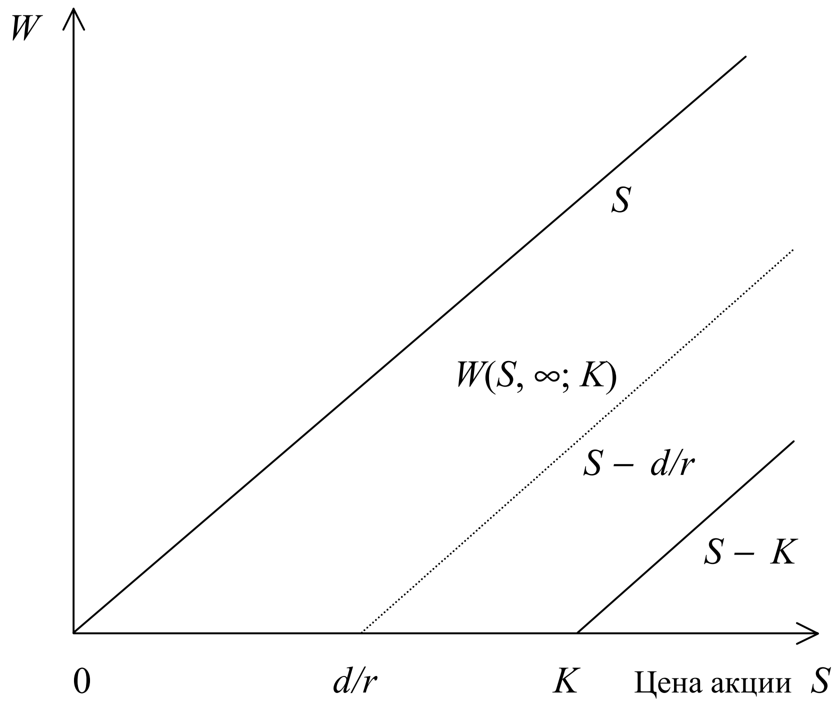

Рис. 2.1. Стоимость опциона в дату истечения как функция цены акции

и после применения граничных условий преобразуется к виду

$$W(S, \infty; K) = S - \frac{d}{r}\left(1 - \frac{\left(\dfrac{2d}{\sigma^2 S}\right)^{2r/\sigma^2}}{\Gamma\left(2 + \dfrac{2r}{\sigma^2}\right)} M\left(\frac{2r}{\sigma^2},\, 2 + \frac{2r}{\sigma^2},\, \frac{-2d}{\sigma^2 S}\right)\right), \qquad (2.28)$$

где M является конфлюентной гипергеометрической функцией.

Функция W изображена на рис. 2.1.

Анализ выражения (2.28) показывает, что W проходит через начало координат, является выпуклой и имеет асимптоту ($S - d/r$) для больших S, т. е. достигает стоимости обыкновенной акции минус настоящая дисконтированная стоимость всех будущих дивидендов, потерянных из-за обладания опционом.

Рассмотрим случай непрерывно изменяющейся цены исполнения $K(\tau)$, где K предполагается дифференцируемой и убывающей функцией времени, оставшегося до погашения, т. е. $dK/d\tau = -dK/dt = -K' < 0$.

Цена опциона удовлетворяет уравнению (2.24) при $D = 0$ и подчиняется граничным условиям

$$W(S, 0; K(0)) = \max\,[0, S - K(0)]$$

и

$$W(S, \tau; K(\tau)) \geq \max\,[0, S - K(\tau)].$$

Для упрощения вида уравнения (2.24) сделаем замену переменных $X \equiv S/K(\tau)$ и $F\,(X, \tau) \equiv W\,[S, \tau; K(\tau)]/K(\tau)$. Тогда F будет удовлетворять уравнению

$$\sigma^2 X^2 F_{11}/2 + \eta(\tau)\,XF_1 - \eta(\tau)\,F - F_2 = 0 \qquad (2.29)$$

при ограничениях $F\,(X, 0) = \max\,[0, X - 1]$ и $F\,(X, \tau) \geq \max\,[0, X - 1]$, где $\eta\,(\tau) \equiv r - K'/K$.

Заметим, что структура уравнения (2.29) идентична уравнению для цены опциона с фиксированной ценой исполнения и изменяющейся, но не стохастичной, «процентной ставкой» $\eta(\tau)$. (Например, используем в анализе предыдущего параграфа вместо $P(\tau)$ величину $\exp\,[-\int_0^\tau \eta\,(s)\,ds]$, не позволяя $\eta\,(\tau)$ принимать отрицательные значения для достаточно больших изменений цены исполнения.) Мы уже показали, что для $\int_0^\tau \eta(s)ds \geq 0$ досрочного исполнения опциона не будет, и ценой исполнения будет только терминальная. Замечая, что формальная подстановка

$$\int_0^\tau \eta\,(s)ds = \int_0^\tau [r + dK/ds]\,ds = r\tau + \ln[K(\tau)/K(0)]$$

в выражение (2.18) вместо $P(\tau)$ показывает, что стоимость опциона такая же, как и стоимость опциона с фиксированной ценой исполнения $K(0)$ и процентной ставкой r. Мы также имеем, что $\int_0^\tau \eta(s)ds \geq 0$ влечет неравенство $K(\tau) \geq K(0)\,\exp(-r\tau)$, которое является общим достаточным условием для отсутствия бессрочного исполнения.

§ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТОИМОСТИ АМЕРИКАНСКИХ ОЦИОНОВ-ПУТ

В качестве первого примера применения модели к опционам другого типа рассмотрим рациональное определение цены опциона-пут в предположениях § 4. Стоимость европейского опциона-пут полностью определяется сразу же, как только становится известной стоимость опциона-колл. Блэк и Шоулс дают решение для своей модели в виде формулы (2.2). Определение стоимости европейского опциона не совпадает с определением стоимости американского опциона-пут из-за положительной вероятности досрочного исполнения. Если $G(S, \tau; K)$ является рациональной ценой пута, тогда с помощью метода, использованного для вывода уравнения (2.24), при $D = 0$ получаем уравнение для G

$$\sigma^2 S^2\, G_{11}/2 + rSG_1 - rG - G_2 = 0 \tag{2.30}$$

при ограничениях на цену опциона-пут $G(S, 0; K) = \max\,[0, K - S]$, $G(S, \tau; K) \geq \max\,[0, K - S]$, $G(\infty, \tau; K) = 0$.

В анализе Самюэльсона и МакКина по опционам не имеется решения уравнения (2.30) в явном виде для конечного τ. Однако, используя их метод, можно получить решения для бессрочного опциона-пут (т. е. $\tau = \infty$). Для достаточно низких цен акций будет выгодно исполнять пут. Определим C как наибольшую стоимость акции такую, что владельцу пута лучше исполнять его, чем владеть им. Для бессрочного пута уравнение (2.30) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\sigma^2 S^2\, G_{11}/2 + rSG_1 - rG = 0, \tag{2.31}$$

которое справедливо для цен акций из интервала $C \leq S \leq \infty$.

Граничными условиями для уравнения (2.31) являются равенства

$$G(\infty, \infty; K) = 0, \tag{2.32}$$

$$G(C, \infty, K) = K - C, \tag{2.33}$$

C должно быть выбрано так, чтобы максимизировать стоимость опциона, что следует из рассуждений предыдущего раздела о максимизации поведения. (2.34)

Из теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что решение (2.31) содержит константы a_1 и a_2. Граничные условия (2.32), (2.33) и (2.34) будут определять эти константы вместе с неизвестной нижней границей цены акции C. Общим решением уравнения (2.31) является

$$G\,(S, \infty; K) = a_1 S + a_2 S^{-\gamma}, \tag{2.35}$$

где $\gamma \equiv 2r/\sigma^2 > 0$.

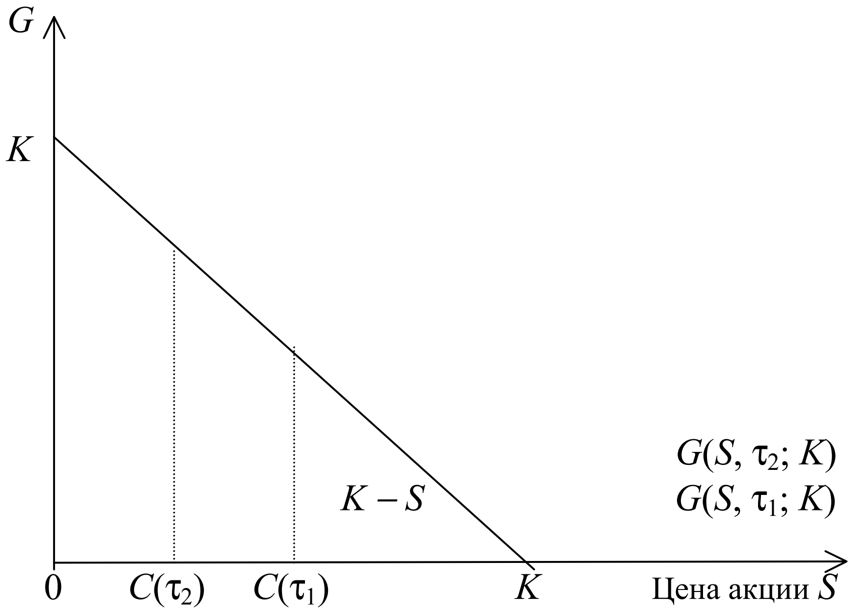

Рис. 2.2. Цена G американского опциона-пут как функция цены акции S

Равенство (2.32) требует, чтобы $a_1 = 0$, а из условия (2.33) получаем $a_2 = (K - C)C^{\gamma}$. Поэтому решение (2.35) как функция C имеет вид

$$G\,(S, \infty; K) = (K - C)\,(S/C)^{-\gamma}. \qquad (2.36)$$

Чтобы определить C, используем условие (2.34) и выберем такое значение C, которое максимизирует функцию (2.36), т. е. выберем $C = C^*$ таким образом, чтобы $\partial G/\partial C = 0$. Разрешая это уравнение, имеем $C^* = \gamma K\,/\,(1+\gamma)$, и цена опциона-пут определяется по формуле

$$G\,(S, \infty; K) = \frac{K}{(1+\gamma)}\left(\frac{(1+\gamma)S}{\gamma\,K}\right)^{-\gamma}. \qquad (2.37)$$

Граничное условие «сшивания» Самюэльсона $G_1(C^*, \infty; K) = -1$ как альтернативное определение граничного условия (2.34) может быть проверено путем дифференцирования (2.37) по S и подстановки $S = C$. На рис. 2.2 показана цена американского пута как функция цены акции и времени до истечения.

§ 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТОИМОСТИ ОПЦИОНА-КОЛЛ «DAO»

В качестве второго примера применения модели к другим типам опционов рассмотрим рациональное определение цены опциона-колл нового типа, называемого «DaO» (Down-and-Outer, «упала цена – выбрасывай»). Для этого опциона используем те же обозначения, что и для стандартного опциона, но с дополнительным свойством: если цена акции падает ниже установленного уровня («нокаутной» цены), опционный контракт аннулируется, т. е. опцион становится бесполезным. Обычно «нокаутная» цена является функцией времени до истечения, возрастая при приближении даты истечения.

Пусть $f(S, \tau; K)$ – стоимость европейского опциона-колл типа DaO, а $B(\tau) = bK\exp(-\eta\tau)$ – «нокаутная» цена, являющаяся функцией времени до истечения. Здесь предполагается, что $\eta \geq 0$ и $0 \leq b \leq 1$. Тогда f будет удовлетворять основному уравнению в частных производных

$$\sigma^2 S^2 f_{11}/2 + rSf_1 - rf - f_2 = 0, \tag{2.38}$$

с граничными условиями $f(B(\tau), \tau; K) = 0$, $f(S, 0; K) = \max[0, S - K]$.

Уместно заметить, что если бы $B(\tau) = 0$, тогда уравнение (2.38) было бы уравнением для стандартного европейского опциона-колл.

В некоторых версиях такого опциона владелец получает положительную компенсацию $R(\tau)$, когда цена акции падает ниже «нокаутной» цены. Компенсация $R(\tau)$ – возрастающая функция времени до истечения (т. е. $R'(\tau) > 0$), но $R(0) = 0$. Пусть функция $g(S, \tau)$ удовлетворяет уравнению (2.38) для $B(\tau) \leq S < \infty$ при граничных условиях: а) $g(B(\tau), \tau) = R(\tau)$ и б) $g(S, 0) = 0$. Тогда функция стоимости опциона $F(S, \tau; K) \equiv g(S, \tau) + f(S, \tau; K)$ будет удовлетворять уравнению (2.38) с ограничениями: а) $F(B(\tau), \tau; K) = R(\tau)$ и б) $F(S,0; K) = \max[0, S - K]$. Поэтому F является стоимостью рассматриваемого опциона-колл с компенсационной выплатой $R(\tau)$, а $g(S, \tau)$ – дополнительная стоимость за наличие компенсации.

Сделаем замену переменных:

$$x \equiv \ln[S/B(\tau)], \quad T \equiv \sigma^2\tau, \quad H(x, T) \equiv \exp[ax + \gamma\tau] f(S, \tau; K)/K,$$

$$a \equiv [r - \eta - \sigma^2/2]/\sigma^2, \quad \gamma \equiv r + a^2\sigma^2/2.$$

Путем подстановки новых переменных в уравнение (2.38) приходим к уравнению для H

$$H_{11}/2 - H_2 = 0 \tag{2.39}$$

с граничными условиями $H(0, T) = 0$, $H(x, 0) = e^{ax} \max[0, be^x - 1]$. Решение такого уравнения является стандартной задачей определения стоимости с полубесконечными границами и решается методом разделения переменных или методом преобразования Фурье.

Решая уравнение (2.39) и возвращаясь к исходным переменным, мы приходим к определению стоимости опциона DaO в виде

$$f(S, \tau; K) = [S \operatorname{erfc}(h_1) - Ke^{-r\tau}\operatorname{erfc}(h_2)]/2 -$$

$$- (S/B(\tau))^{-\delta}[B(\tau)\operatorname{erfc}(h_3) - (S/B(\tau))\, Ke^{-r\tau}\operatorname{erfc}(h_4)]/2, \tag{2.40}$$

где

$$h_1 \equiv -[\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)\tau]/\sqrt{2\sigma^2\tau};$$

$$h_2 \equiv -[\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)\tau]/\sqrt{2\sigma^2\tau};$$

$$h_3 \equiv -[2\ln(B(\tau)/K) - \ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)\tau]/\sqrt{2\sigma^2\tau};$$

$$h_4 \equiv -[2\ln(B(\tau)/K) - \ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)\tau]/\sqrt{2\sigma^2\tau};$$

и $\delta \equiv 2(r - \eta)/\sigma^2$.

Сравнивая формулы (2.40) и (2.1), обнаруживаем, что первая половина формулы (2.40) является стоимостью стандартного опциона-колл и поэтому вторая половина – «дисконтированная» поправка, связанная с особенностью опциона DaO.

Для лучшего понимания качественного различия между стандартным опционом-колл и опционом DaO полезно перейти к предельному бессрочному опциону, а «нокаутную» цену принять равной константе (т. е. $\eta = 0$). В этом случае уравнение (2.38) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\sigma^2 S^2 f''/2 + rSf' - rf = 0 \tag{2.41}$$

с граничными условиями $f(bK) = 0$, $f(S) \le S$, где штрих обозначает дифференцирование, а $f(S)$ является сокращенной записью для функции $f(S, \infty; K)$.

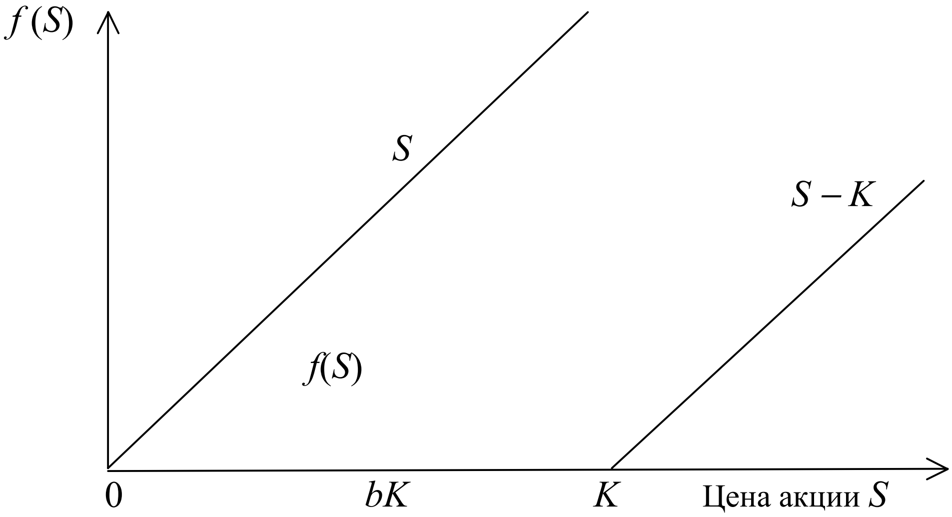

Рис. 2.3. Стоимость $f(S)$ опциона-колл DaO как функция цены акции S

Решая уравнение (2.41) стандартными методами, получаем

$$f(S) = S - bK(S/bK)^{-\gamma}, \qquad (2.42)$$

где $\gamma \equiv 2r/\sigma^2$.

Вспоминая, что стоимость стандартного бессрочного опциона-колл равна стоимости акции, мы можем интерпретировать $bK(S/bK)^{-\gamma}$ как «скидку» в связи со свойствами DaO.

Функции (2.40) и (2.42) однородные первой степени по (S, K), как и для стандартных опционов. Легко показать, что $f(S) \geq \max\,[0, S - K]$, и, хотя это сложнее, можно показать, что $f(S, \tau; K) \geq \max\,[0, S - K]$.

Следовательно, опцион ценнее, когда он не исполнен, и поэтому формулы (2.40) и (2.42) корректны для определения стоимости американского опциона DaO.

Из выражения (2.42) видно, что эластичность цены опциона по отношению к цене акции $[Sf'(S)/f(S)]$ больше единицы, так что он является «подъемной» ценной бумагой. Однако в отличие от цены стандартного опциона-колл, стоимость которого вычисляется по формуле (2.1), она – вогнутая функция цены акции (рис. 2.3).

§ 7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТОИМОСТИ ОТЗЫВАЕМОГО ОПЦИОНА

В качестве третьего примера применения модели к другим типам опционов рассмотрим рациональное определение цены отзываемого американского опциона. Хотя отзываемые опционы редко выпускаются, рассматриваемый пример является важным, поскольку анализ легко переносится на определение стоимости других типов ЦБ, таких как конвертируемые облигации, которые почти всегда выпускаются как отзываемые.

Для американских опционов мы принимаем стандартные условия, за исключением того, что выпускающая компания имеет право отозвать, т. е. выкупить, опцион в любое время по фиксированной цене. Поскольку опцион американского типа, при его отзыве владелец имеет право его исполнить, а не продавать обратно компании по цене отзыва. Если такое встречается, то говорят, что произошла «вынужденная конверсия», поскольку владелец опциона «вынужден» его исполнить, если стоимость опциона превышает цену отзыва.

Стоимость отзываемого опциона будет равна стоимости эквивалентного неотзываемого опциона минус некоторая «скидка». Эта скидка будет стоимостью обеспечения отзыва компанией. Можно представлять отзываемый опцион как результат двух сделок: компания продает неотзываемый опцион инвестору и одновременно приобретает у инвестора право или «вынудить» его к досрочной конверсии, или вернуть опцион по фиксированной цене.

Пусть $F(S, \tau; K)$ будет стоимостью отзываемого американского опциона, $H(S, \tau; K)$ – стоимостью эквивалентного неотзываемого опциона, какой она вычисляется по формуле (2.1), $C(S, \tau; K)$ – стоимостью отзыва. Тогда $H = F + C$ и F будут удовлетворять основному уравнению в частных производных

$$\sigma^2 S^2 F_{11}/2 + rSF_1 - rF - F_2 = 0 \tag{2.43}$$

по переменной $S \in [0, \bar{S}]$ при следующих ограничениях: $F(0, \tau; K) = 0$, $F(S, 0; K) = \max[0, S - K]$, $F(\bar{S}, \tau; K) = \max[K^*, \bar{S} - K]$, где K^* является ценой колла, а $\bar{S}$ есть (пока не определенный) уровень цены акции, когда компания будет отзывать опцион. В отличие от случая «добровольной» конверсии опциона из-за неблагоприятной защищенности дивидендов, проанализированной в § 4, $\bar{S}$ выбирается не владельцем опциона, а компанией и, следовательно, не будет выбираться так, чтобы максимизировать стоимость опциона.

Поскольку $C = H - F$, а H и F удовлетворяют уравнению (2.43), C тоже будет удовлетворять (2.43) при соблюдении граничных условий $C(0, \tau; K) = 0$, $C(S, 0; K) = 0$, $C(\bar{S}, \tau; K) = H(\bar{S}, \tau; K) - \max [K^*, \bar{S} - K]$. Поскольку $\bar{S}$ выбирает компания, мы добавляем условие максимизации по $\bar{S}$ для того, чтобы максимизировать $C(S, \tau; K)$, что делает (2.43) корректно поставленной задачей. Так как $C = H - F$ и H не являются функциями $\bar{S}$, условие максимизации C может быть переписано как условие минимизации F.

В общем случае невозможно получить решение уравнения (2.43) в явной форме. Однако решение для бессрочного опциона найти можно. В этом случае мы знаем, что $H(S, \tau; K) = S$, и уравнение (2.43) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\sigma^2 S^2 C''/2 + rSC' - rC = 0 \qquad (2.44)$$

для $0 \le S \le \bar{S}$ с ограничениями $C(0) = 0$, $C(\bar{S}) = \bar{S} - \max (K^*, \bar{S} - K)$, а $\bar{S}$ выбирается так, чтобы максимизировать C. Здесь $C(S)$ является сокращенной записью функции $C(S, \infty; K)$, а штрих означает производную. Решая уравнение (2.44) и используя два первых ограничения, получаем выражение

$$C(S) = (1 - \max [K^*/\bar{S}, 1 - K/\bar{S}])\, S.$$

Хотя мы и не можем использовать какой-либо простой метод для максимизации C, очевидно, что $\bar{S} = K^* + K$, так как для $\bar{S} < K + E$ функция C является возрастающей, а для $\bar{S} > K^* + K$ – убывающей. Поэтому стоимость обеспечения отзыва

$$C(S) = \left(\frac{K}{K + K^*}\right) S,$$

и поскольку $F = H - C$, стоимость отзываемого бессрочного опциона

$$F(S) = \left(\frac{K^*}{K^* + K}\right) S.$$

§ 8. РАЗРЫВНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕН АКЦИЙ

В этом параграфе исследуется структура проблем определения стоимости опционов и разрабатывается альтернативный метод их решения. Вводится несколько скачкообразных и диффузионных процессов, которые не использовались в предыдущих параграфах. Для этих процессов разработанным методом находятся явные формулы определения стоимости опционов и решения некоторых задач, включающих определение цен активов, допускающих выплаты и потенциальное банкротство.

Основной результат этого параграфа состоит в рассмотрении нетрадиционных форм стохастических процессов для описания динамики цены акции и разработке подхода к проблеме определения стоимости опционов, который прямо связывает ее со структурой лежащего в основе стохастического процесса. Поэтому здесь будет полезно повторить краткое неформальное рассмотрение стохастических процессов, которые были использованы ранее.

Основное предположение в модели Блэка – Шоулса заключалось в том, что стоимость акции следует логнормальному диффузионному процессу

$$dS/S = \mu dt + \sigma dW, \tag{2.45}$$

где S – стоимость акции; μ – функция дрейфа; W – винеровский процесс.

Уравнение (2.45) является формальным описанием следующего стохастического процесса. Пусть S будет стоимостью акции в момент времени t. Относительное изменение этой стоимости на интервале времени от t до $t + dt$ равно

$$dS/S = (S_{t+dt} - S_t)/S_t.$$

Согласно уравнению (2.45), это относительное изменение состоит из двух слагаемых: функции дрейфа μdt, которая определяется в момент t, и нормально распределенным стохастическим слагаемым σdW. Стохастическое слагаемое не зависит от своих значений в других интервалах времени и имеет нулевое среднее и дисперсию $\sigma^2 dt$. Попросту говоря, уравнение (2.45) показывает, что относительное изменение стоимости акции за время от t до $t + dt$ нормально распределено со средним μdt и дисперсией $\sigma^2 dt$. Когда dt достаточно мало, тогда S_{t+dt} не сильно отличается от S_t. Это признак диффузионного процесса, который представляет собой вид вязкого непрерывного случайного блуждания около функции тренда и на коротком промежутке времени не имеет особенностей.

Вместе с тем диффузионные процессы – только один из двух общих классов стохастических процессов в непрерывном времени. Вторым типом стохастического процесса в непрерывном времени является разрывный (скачкообразный) процесс. Простой разрывный процесс можно описать по аналогии с (2.45) как

$$dS/S = \mu\, dt + (k-1)d\pi \;= \mu\, dt + \begin{cases} \lambda dt & \to \quad k-1, \\ 1-\lambda dt & \to \quad 0. \end{cases} \tag{2.46}$$

В уравнении (2.46) π является процессом Пуассона в непрерывном времени, т. е. процессом с исходами типа III (см. гл. 1), λ имеет смысл интенсивности процесса и $k-1$ преставляет собой величину скачка. Как и (2.45), уравнение (2.46) – формальное описание стохастического процесса, который определяет относительное изменение стоимости акции на интервале времени от t до $t + dt$. Уравнение (2.46) говорит о том, что это относительное изменение составлено из функции дрейфа μdt и слагаемого $d\pi$, которое с вероятностью λdt будет скачком относительного изменения стоимости акции на $k-1$, возможно, случайным, и с вероятностью $1-\lambda dt$ будет нулевым. Допустимой интерпретацией этого является то, что λdt представляет собой мгновенную вероятность получения пакета информации, которая вызовет скачкообразное изменение процесса S.

В отличие от диффузионного процесса скачкообразный процесс (2.46) изменяется детерминированно до тех пор, пока не происходят дискретные скачки. Формально скачкообразный процесс имеет выборочные траектории, которые разрывны с вероятностью единица, в то время как выборочные траектории диффузионного процесса с вероятностью единица непрерывны. Кроме того, рассматриваемые скачкообразные процессы непрерывны справа почти всюду, т. е. их разрывы являются простыми скачками. Из-за разрывов стоимости локальный анализ Блэка – Шоулса для определения стоимости опционов прямо не переносится на уравнение (2.46). Хотя, предположив, что k фиксировано, можно показать, что безрисковый хедж можно было бы сформировать, и использовать для определения стоимости опционов скачкообразные процессы.

В этом параграфе мы преследуем две цели. Во-первых, проверяем рациональность предположения о том, что стоимости акций следуют уравнениям (2.45) или (2.46), и предлагаем некоторые полезные альтернативные формы. Они позволят нам рассмотреть соотношение между выбором процесса и решениями проблем опционов, в то же время снабжая дополнительными моделями для опытной проверки. Во-вторых, используем метод, предложенный Коксом и Россом (Cox, Ross, 1976), для решения задачи определения стоимости опционов. Этот подход дает еще одно понимание структуры задачи определения стоимости опционов, и его применение позволяет решить задачу определения стоимости облигации, по которой выплачиваются купоны, с произвольной известной датой погашения и задачу определения стоимости опциона на акцию с постоянными выплатами дивидендов.

При использовании нетрадиционных форм полезно строить их как скачкообразные процессы, так как многие из наших интуитивных соображений могут быть формализованы с помощью разрывных процессов, но мы используем диффузионные процессы из-за их аналитического удобства, не обращая внимания на вопрос, следует ли «реальный мир» диффузионному или разрывному процессу. Уравнение (2.46), например, описывает обычную акцию, чья стоимость дрейфует детерминированно, пока не будет получена порция новой информации. Информация прибывает с вероятностью λdt, и когда это происходит, стоимость акции скачкообразно изменяется на $(k - 1)$ процентов. Диффузионный процесс (2.45) – предел такого процесса, когда информация прибывает непрерывно и имеет только инфинитезимальное влияние.

Уравнение (2.46) является очень частным случаем общей формы марковских скачкообразных процессов. Если через x обозначить текущее состояние среды, тогда общий скачкообразный процесс определяется уравнением

$$dS = \mu(x)dt + \begin{cases} \lambda(x)dt & \to \quad \tilde{k}(x) - 1, \\ 1 - \lambda(x)dt & \to \quad 0, \end{cases} \tag{2.47}$$

где $\tilde{k}(x)$ имеет распределение, зависящее от текущего состояния среды x.

Предположим, что $x = S$, т. е. вся информация о состоянии содержится в текущей стоимости акции S. Мы могли бы, конечно, добавить слагаемое винеровской диффузии $\sigma(x)dW$ к уравнению (2.47), чтобы получить более общий процесс, но уравнение (2.47) уже содержит диффузию как предельный случай (см. ниже). Мотивация конкретизации (2.47) в форме (2.45) или (2.46) состоит в том, что они содержат два понятия. Во-первых, выражаются в относительных или процентных величинах и рационально конкретизируют стохастический механизм в процентах, так как доход выражается в процентах. Во-вторых, при задании процесса в терминах процентов можно естественным образом ввести предельное ограничение стоимости акции $S > 0$. Как уравнение (2.45), так и уравнение (2.46) удовлетворяют этому граничному условию. Возможно, эти рассуждения не очень убедительны, тем не менее представляется, что нет причин для использования только уравнений (2.45) или (2.46). Делая так, мы просмотрели бы ряд интересных и одинаково обоснованных типов процессов.

Предположим, например, что в уравнении (2.47) мы задали интенсивность $\lambda(S)$ и дрейф $\mu(S)$ пропорционально значениям λS и μS, и выберем распределение $k - 1$, независимым от стоимости. Тогда

$$dS = \mu S dt + \begin{cases} \lambda S dt & \to \quad k - 1, \\ 1 - \lambda S dt & \to \quad 0. \end{cases} \qquad (2.48)$$

При наличии дрейфа уравнение (2.48) является обобщением класса стохастических процессов, известных как процессы гибели и размножения. Локальные среднее и дисперсия процесса (2.48) даются выражениями

$$E\{dS\} = [\mu + \lambda E\{k - 1\}]S dt, \quad V\{dS\} = \lambda E\{(k - 1)^2\} S dt. \qquad (2.49)$$

Чтобы построить чистый процесс рождения и гибели, проигнорируем дрейф в уравнении (2.48) и позволим k принимать только два значения: $k^+ > 1$ и $k^- < 1$ соответственно с (условными) вероятностями π^+ и π^-:

$$dS = \begin{cases} \lambda S dt & \to \quad \begin{cases} \pi^+ & \to \quad k^+ - 1 \\ \pi^- & \to \quad k^- - 1 \end{cases} \\ 1 - \lambda S dt & \to \quad 0 \end{cases} = \begin{cases} \pi^+ \lambda S dt & \to \quad k^+ - 1, \\ \pi^- \lambda S dt & \to \quad k^- - 1, \\ 1 - \lambda S dt & \to \quad 0. \end{cases} \qquad (2.50)$$

Уравнение (2.50) теперь является примером простого процесса рождения и гибели популяции. Представим себе фирму, выпускающую детали (членов популяции), чей суммарный выпуск (размер популяции) равен S. Если эти детали стохастически независимы одна от другой, можно допустить, что λdt представляет собой вероятность события, состоящего в том, что выпускается какая-то одна деталь. Событием с вероятностью π^+ является «рождение» $k^+ - 1$ дополнительных деталей и с вероятностью π^- – «гибель» $1 - k^-$ деталей. Для всей фирмы (популяции) уравнение (2.50) тогда описывает локальное изменение ее состояния. Если же $\mu = 0$, а $\pi^+ = 1$, тогда уравнение (2.50) описывает чистый процесс рождения, и если $\pi^- = 1$, то уравнение (2.50) описывает чистый процесс гибели. В отличие от (2.50) уравнение (2.46) описывает стохастическое изменение состояний фирмы (популяции), все члены которой совершенно зависимы, т. е. когда один изменяется, все они изменяются, и вероятность такого события λdt не зависит от размера выпуска (размера популяции), хотя величина просто пропорциональна.

Другое интересное различие между уравнениями (2.46) и (2.50) можно увидеть путем перехода к диффузионному пределу в уравнении (2.50). Диффузионный предел уравнения (2.46) – это относительный процесс (2.45). В конце параграфа мы покажем, что предел (2.50), при $k^+ \to 1$, $k^- \to 1$ и $\lambda \to \infty$ является диффузией с мгновенным средним μS и дисперсией $\sigma^2 S$, где μ и σ задаются равенствами (2.49), но μ не является таким же дрейфом, что и в уравнении (2.48). Выразим результат через стохастические дифференциалы

$$dS = \mu S dt + \sigma \sqrt{S}\, dW. \tag{2.51}$$

Хотя этот тип диффузии полезно рассматривать как предельный случай экономики, в которой фирмы состоят из независимых единиц, такая интерпретация необязательна. Другие формы причинности могут привести к тому же вероятностному описанию событий. Мы можем рассмотреть этот диффузионный процесс исключительно из-за его собственных преимуществ при описании ситуации, в которой изменения состояний являются малыми и в которых дисперсия цен растет с увеличением цен на акции, но медленнее, чем в случае уравнения (2.45), так чтобы дисперсия ставки доходности уменьшалась, а не оставалась постоянной. Рассмотренный таким образом процесс может, конечно, не отвергаться на основе априорной информации, а может во многих ситуациях быть предпочтительнее, чем процесс (2.45). Следует заметить, что в отличие от (2.45) диффузионный процесс (2.51) позволяет, чтобы $S = 0$, т. е. банкротство встречается с вероятностью единица (даже в отсутствие выплат по акциям).

Другой интересной конкретизацией уравнения (2.47) является случай, когда фирма состоит из зависимых подразделений, как в уравнении (2.46), так что интенсивность λ и величина приращений – константы. В таком случае

$$dS = \mu S dt + \begin{cases} \lambda dt & \rightarrow \begin{cases} \pi^{+} & \rightarrow \quad k^{+} - 1, \\ \pi^{-} & \rightarrow \quad k^{-} - 1, \end{cases} \\ 1 - \lambda dt & \rightarrow \quad 0, \end{cases} \tag{2.52}$$

и мы совсем избавились от пропорциональности. Это является случаем, когда стоимость растет эндогенно с экспоненциальной скоростью μ, а суммарные экзогенные приращения стоимости размера $k - 1$ встречаются с интенсивностью λ. Мы будем называть такой процесс *абсолютным*.

Локальные среднее и дисперсия абсолютного процесса даются выражениями

$$E\{dS\} = \{\mu S + \lambda[\pi^{+}(k^{+} - 1) + \pi^{-}(k^{-} - 1)]\}dt$$

и

$$V\{dS\} = \lambda[\pi^{+}(k^{+} - 1)^2 + \pi^{-}(k^{-} - 1)^2]\, dt \tag{2.53}$$

в случае, когда k является константой. Если $\pi^{-} = 0$, процесс характеризует ограниченную ответственность, но если $\pi^{-} > 0$, имеется положительная вероятность того, что он приводит к дефолту. Поэтому для сохранения ограниченной ответственности мы также должны конкретизировать неотрицательный нижний барьер для S. Вычислив диффузионный предел в уравнении (2.52) так же, как в (2.50), получим

$$dS = \mu S dt + \sigma dW, \tag{2.54}$$

где μ и σ определяются формулами (2.53).

Таким образом, этот процесс характеризовал бы такую фирму, приращения стоимости которой имеют постоянную дисперсию. Для обеспечения ограниченной ответственности установим поглощающий барьер в начале координат и будем считать (2.54) процессом, управляющим стоимостью акций до тех пор, пока этот уровень не будет достигнут. При этом снова в течение любого периода времени имеется положительная вероятность банкротства.

Чтобы получить стохастический дифференциал (2.51) достаточно продемонстрировать, что обратное уравнение Колмогорова (см. § 9) для функции переходной вероятности

$$P_{x,\,y}(t,\tau) = \mathrm{prob}\{S_\tau = y \mid S_t = x\},\ \tau > t,$$

процесса рождения и гибели (2.50) сходится к уравнению для диффузии (2.51) при соответствующих рассуждениях предельного перехода. Обратное уравнение для (2.50) имеет вид

$$-(\partial P_{x,\,y}/\partial t) = -\lambda x P_{x,\,y} + \lambda x\pi^{+} P_{x+\Delta x,\,y} + \lambda x\pi^{-} P_{x-\Delta x,\,y},$$

где $\Delta x = k^{+} - 1$ и $k^{-} - 1 = -\Delta x$.

Теперь, чтобы найти мгновенные среднее и дисперсию диффузионного процесса (2.51), при переходе к пределу изменяем интенсивности при $\Delta x \to 0$ таким образом, чтобы

$$\lambda x(\Delta x)^2 = \sigma^2 x \quad \text{и} \quad \lambda x(\pi^{+} - \pi^{-})\Delta x = \mu x$$

или

$$\lambda = \sigma^2/(\Delta x)^2,\ \lambda\pi^{+} = [\sigma^2/(\Delta x)^2 + \mu/\Delta x]/2,\ \lambda\pi^{-} = [\sigma^2/(\Delta x)^2 - \mu/\Delta x]/2.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в обратном уравнении, получаем обратное уравнение для диффузии (2.51):

$$-(\partial P_{x,\,y}/\partial t) = -\lambda x P_{x,\,y} + \lambda x\pi^{+}[P_{x,\,y} + (\partial P_{x,\,y}/\partial x)\Delta x + (\partial^2 P_{x,\,y}/\partial x^2)(\Delta x)^2/2] +$$

$$+\lambda x\pi^{-}[P_{x,\,y} - (\partial P_{x,\,y}/\partial x)\Delta x + (\partial^2 P_{x,\,y}/\partial x^2)(\Delta x)^2/2] =$$

$$= \mu\, x(\partial P_{x,\,y}/\partial x) + \sigma^2 x(\partial^2 P_{x,\,y}/\partial x^2)/2.$$

Получение абсолютного процесса (2.54) с использованием абсолютного скачка (2.52) примерно такое же, но в этом случае нам нужно слагаемое дрейфа. Для абсолютного процесса (2.52) обратное уравнение имеет вид

$$-(\partial P_{x,\,y}/\partial t) = -\lambda x P_{x,\,y} + \lambda x\pi^{+} P_{x+\Delta x,\,y} + \lambda x\pi^{-} P_{x-\Delta x,\,y} + \mu x(\partial P_{x,\,y}/\partial x).$$

Используя предельный процесс $\lambda\pi^+ = \lambda\pi^- = \sigma^2/(\Delta x)^2/2$, можно показать, как и выше, что обратное уравнение сходится к обратному уравнению для абсолютного процесса (2.54):

$$-(\partial P_{x,\,y}/\partial t) = \mu x(\partial P_{x,\,y}/\partial x) + \sigma^2 x(\partial^2 P_{x,\,y}/\partial x^2)/2.$$

Производные можно взять эвристическими и только доказать поточечную сходимость, хотя это может быть строго обобщено, чтобы показать равномерную сходимость. Кроме того, необходимо добавить, что поскольку S рассматривается как стоимость, мы в уравнения (2.51) и (2.54) вводим поглощающий барьер при $S = 0$. Это показывает, что как в (2.51), так и в (2.54) положительное S будет стремиться к нулю с положительной вероятностью.

§ 9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТОИМОСТИ ОПЦИОНОВ ДЛЯ РАЗРЫВНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Структуру обоснования хеджирования, используемую для получения формул определения стоимости опционов, можно проиллюстрировать в довольно общей постановке. Первым шагом является выбор конкретного стохастического процесса, управляющего изменением цен лежащего в основе актива, скажем, акции с ценой S. Предположим, что можно записать случайное изменение S в дифференциальном виде как

$$dS = \mu_S\, dt + \sigma_S\, dx_S. \tag{2.55}$$

Как и в примере § 8, μ_S и σ_S выбираются как функции текущего состояния среды, которая для простоты предполагается определяемой только переменными S и t. Считается, что (непредвиденное) стохастическое слагаемое dx_S является или приращением винеровской диффузии dW, или единичной пуассоновской переменной $d\pi$. Если dx_S – пуассоновское слагаемое, тогда интерпретируем σ_S в уравнении (2.55) как заданную величину случайного скачка.

Следующий шаг в наших рассуждениях – задание финансового инструмента, стоимость которого зависит от S, скажем, опциона на акцию, и предположим, что существует достаточно регулярная функция цены $P(S, t)$, являющейся стоимостью опциона в момент времени t при условии, что цена акции в момент t равна S. Введение такой функции позволяет нам (при условии, что μ_S, σ_S и P – функции с достаточно хорошим поведением в математическом смысле) получить дифференциал изменения стоимости опциона в виде

$$dP = \mu_P\, dt + \sigma_P\, dx_S.$$

Функции μ_P и σ_P теперь зависят от неизвестной функции P и известных значений S и t. Если dx_S следует единичному процессу Пуассона, тогда σ_P может рассматриваться как случайная функция, значения которой зависят от функции P и величины скачка σ_S, но не обязательно пропорциональны σ_S.

Экономические рассуждения, которые приводят к формуле для определения цены опциона, основаны на наличии третьего актива, зарабатывающего деньги согласно безрисковой мгновенной процентной ставке r, которую будем принимать постоянной ставкой для свободного взятия или дачи кредитов индивидуальными лицами. Мы также предположим, что акция S может быть продана на короткий срок продавцом, получающим выручку, и что нет никаких расходов на сделки и налоги. Наиболее важным предположением является то, что деятельность агентов не может влиять на r или какие-либо цены.

При этих предположениях легко показать, что все безрисковые активы должны зарабатывать согласно безрисковой процентной ставке r, чтобы предотвратить арбитраж.

Задачу о стоимости опциона при случайных скачках можно решить на более чем одно значение, как в процессе (2.50) рождения и гибели, где π^+ и π^- не равны нулю. Однако для того, чтобы сделать это, требуется введение дополнительных акций для обеспечения аргументов хеджирования, как это сделали Кокс и Росс (Cox, Ross, 1976), или использовать арбитражные рассуждения для получения приближенной формулы, как в работе Мертона (Merton, 1990). Чтобы избежать каждой из этих возможностей, в дальнейшем предположим, что если dx_S является процессом Пуассона, то скачки величиной σ_S (и σ_P) – неслучайные функции.

Из этого следует, что имеется хеджирующий портфель из акции S и ее опциона P такой, что

$$\alpha_S\sigma_S\, (dx_S/S) + \alpha_P\sigma_P\, (dx_S/P) = 0,$$

или

$$\alpha_S\, (\sigma_S/S) + \alpha_P\, (\sigma_P/P) = 0, \tag{2.56}$$

где α_S и α_P – портфельные веса соответственно для акции и опционов. Такой хеджирующий портфель является безрисковым и должен иметь ставку доходности

$$\alpha_S (\mu_S / S) + \alpha_P (\mu_P / P) = (\alpha_S + \alpha_P)\, r \tag{2.57}$$

при безрисковой процентной ставке.

Из равенств (2.56) и (2.57) получаем основное уравнение определения стоимости опционов:

$$(\mu_P - rP)/\sigma_P = (\mu_S - rS)/\sigma_S. \tag{2.58}$$

Таким образом, уравнение определения стоимости сводится к известному утверждению, что премия риска на единицу риска должна быть одинаковой для акции и ее опциона. С математической точки зрения уравнение (2.58) является дифференциально-разностным, и можно надеяться, что применение доступных математических методов позволит решить его и уравнение для стоимости опциона.

Например, при логнормальной диффузии Блэка – Шоулса (2.45) уравнение определения стоимости (2.58) принимает вид

$$\sigma^2 S^2 P_{SS}/2 + r\, SP_S - r\, P = -\, P_t. \tag{2.59}$$

Используя граничное условие для европейского опциона-колл

$$P(S, T) = \max\, \{S - K, 0\},$$

где K является ценой исполнения, Блэк и Шоулс смогли преобразовать (2.59) к уравнению теплопроводности и решить его в явном виде.

Однако Кокс и Росс (Cox, Ross, 1976) для решения уравнения определения стоимости сформулировали систематический подход, который использует экономическую структуру задачи и обеспечивает дальнейшее проникновение в структуру проблем определения стоимости опционов в общем случае. Тот факт, что аргументы хеджирования можно использовать для получения (2.58), и предположение о том, что существует единственная функция $P(S, t)$, означает, что при заданных S и t стоимость опциона P не зависит непосредственно от структуры предпочтений инвестора. Предпочтения инвестора и требуемые условия используются в задаче определения стоимости только при получении значений равновесных параметров. Предпочтения не играют никакой роли до тех пор, пока определяют одинаковые значения соответствующих параметров, и будут идентично определять стоимости опционов. В случае модели Блэка – Шоулса, например, уравнение (2.59) не зависит от μ, и единственно уместными параметрами для задачи определения цены являются r и σ. Чтобы решить уравнение (2.58), нам понадобится только найти равновесное решение для P в некоторой среде, где предпочтения заданы и согласованы с конкретными значениями параметров.

Удобным выбором предпочтений для многих задач (хотя можно предусмотреть проблемы, где другая структура предпочтений может быть более подходящей) является *нейтральность* к риску. В такой равновесной среде требуется, чтобы ожидаемые доходы на акцию и опцион получались согласно одинаковой безрисковой ставке. Тогда для акции

$$E\left\{\frac{S_T}{S_t}\middle| S_t\right\} = e^{r(T-t)}. \tag{2.60}$$

Аналогично, если мы рассматриваем общий европейский опцион с граничным значением $P(S, T) = h(S)$, тогда условное математическое ожидание в момент t

$$E\left\{\frac{P(S_T, T)}{P}\middle| S_t\right\} = \frac{1}{P}E\{h(S_T)|\, S_t\} = e^{r(T-t)}$$

или

$$P(S, t) = e^{-r(T-t)}E\{h(S_T)|\, S_t\} = e^{-r(T-t)}\int h(S_T)dF(S_T, T|S_t, t), \tag{2.61}$$

где $F(S_T, T \mid S_t, t)$ является распределением вероятности цены акции S_T в момент T при условии, что цена акции была равна S_t в момент $t < T$.

Уравнения (2.60) и (2.61) обеспечивают решение задачи определения стоимости опционов. Уравнение (2.60) используется для того, чтобы удовлетворять любым конкретным требованиям к набору параметров, которые предусматриваются уравнением хеджирования. Блэк и Шоулс впервые нашли уравнение (2.59) путем подстановки $\mu = r$ в формулу Спренкла (см. § 2) для стоимости опциона. Мертон также заметил, что подстановка $\alpha = \beta = r$ в модель $\alpha - \beta$ Самюэльсона дает решение Блэка – Шоулса.

Из уравнения (2.61) видно, что зная функцию распределения процесса цены акции, можно определить и стоимость опциона. Обратное обычно также имеет место. В дальнейшем функции или величины будем называть *терминальными*, если они характеризуют значения процесса в дату погашения, исполнения или истечения. В случае европейских опционов-колл, например, общая формула определения цены опциона (2.61) для произвольных цен исполнения K подразумевает знание всех правых квазимоментов терминального распределения цены акции при условии, что уравнение (2.60) удовлетворяется. Однако это эквивалентно знанию самого распределения. Можно описать формальное доказательство этого утверждения. Нам только нужно показать, что квазимоменты определяют распределение. Предположим, что два распределения F и G имеют одинаковые квазимоменты или эквивалентно одинаковые стоимости опционов для всех цен исполнения K. Семейство функций $f_E(S) = \max\{S - K, 0\}$ порождает решетку **K** (замкнутую относительно добавления и умножения на константу) на компактных множествах на линии, которая содержит постоянные функции и отдельные точки. Решетчатая структура является ближайшей и для $K' > K$, $f_E(S) - f_{E'}(S) = K' - K$, $S \geq K'$, т. е. постоянная.

По теореме Стоуна – Вейерштрасса на компактном множестве решетка **K** уплотняется непрерывными функциями, и так как F и G согласованы на **K**, из леммы Релли – Брэя следует, что они согласованы на всех непрерывных функциях. Другими словами, задача определения стоимости опциона реально эквивалентна задаче определения распределения цены акции S, изменение которой управляется постулированным процессом (2.55). Это устанавливает важную связь между задачей определения стоимости опционов и основами стохастических процессов.

Хорошо известно, что переходные функции распределения вероятностей $F(S_T, T \mid S_t, t)$ удовлетворяют двум центральным уравнениям: прямому (или Фоккера – Планка) и обратному уравнениям Колмогорова. Обратные уравнения описывают способ, с помощью которого $F(S_T, T \mid S_t, t)$ изменяется с текущим временем t. Например, обратное уравнение для диффузионного процесса (2.45) задается выражением

$$\sigma^2 S^2 F_{SS}/2 + \mu SF_S + F_t = 0, \tag{2.62}$$

где $S_t = S$ и $F(S_T, T \mid S_t, t)$ должны удовлетворять уравнению (2.62) для всех значений (S_T, T).

В среде, нейтральной к риску, из равенства (2.60) дрейф на акцию $\mu = r$. Предположим теперь, что мы рассматриваем обратное уравнение (2.62) с $\mu = r$. Преобразовывая это уравнение путем подстановки (2.61), получим (2.59), уравнение Блэка – Шоулса для определения стоимости опциона. В общем случае, если равенство (2.60) может быть удовлетворено, уравнение для определения стоимости опциона (2.58) является преобразованием (2.61) обратного уравнения Колмогорова для переходной функции вероятности F. Формальное значение этих наблюдений заключается в том, что мы можем решить задачу определения стоимости опциона только в тех случаях, если знаем терминальное распределение вероятностей стоимости акции.

В дальнейшем этот метод иллюстрируется путем применения его к задачам определения стоимости опционов для стохастических процессов, введенных выше. В частности, можно получить важный новый результат, определение стоимости опционов на акции, выплачивающие дивиденды, путем применения этого метода к процессу с квадратным корнем (2.51).

§ 10. ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТОИМОСТИ ОПЦИОНОВ

Альтернативный скачкообразный процесс

Рассмотрим задачу определения стоимости опционов для некоторого скачкообразного процесса, изученного в § 8. Как и в § 9, общий вид уравнения (2.47) ограничим случаем единственного значения $k(S, t)$ после скачка.

Наша задача – определить стоимость опциона-колл на акцию S с датой истечения T, в которую владелец опциона получает $\max\{S_T - K, 0\}$. Предположим, что по акции не выплачивается никаких дивидендов, так что никогда не будет оптимальным исполнять американский опцион-колл перед датой истечения T, и поэтому его стоимость будет определяться как стоимость европейского опциона-колл (см. § 3). Чтобы решить эту задачу приспособим аргументы хеджирования к скачкообразному случаю. Локальный доход на акцию задается уравнением (2.47) и опцион следует процессу с абсолютной зависимостью

$$dP = \begin{cases} \lambda S dt & \to \quad P(S+k-1) - P(S,t), \\ 1 - \lambda S dt & \to \quad P_t dt + \mu P_S dt, \end{cases}$$

где λ – произвольная функция.

Путем формирования хеджирующего портфеля из акции и опциона соответственно с весами α_S и α_P, выбранными так, чтобы

$$\alpha_S\left[\frac{k-1}{S}\right]+\alpha_P\left[\frac{P(S+k-1,t)-P(S,\,t)}{P(S,\,t)}\right]=0, \tag{2.63}$$

хеджирующая позиция будет безрисковой. Отсюда следует, что если r является (мгновенной) безрисковой процентной ставкой, тогда

$$\alpha_S\left(\frac{\mu}{S}\right)+\alpha_P\left(\frac{P_t+\mu P_S}{P}\right)=(\alpha_S+\alpha_P)r, \tag{2.64}$$

т. е. хедж должен быть эквивалентен безрисковой краткосрочной облигации, чтобы предотвратить арбитражные возможности. Объединяя равенства (2.63) и (2.64), получаем, что $P(S,\,t)$ должна удовлетворять версии дифференциально-разностного уравнения (2.58):

$$\mu P_S+\left[\frac{\mu-rS}{1-k}\right]P(S+k-1,t)+\left[\frac{r(S+k-1)-\mu}{1-k}\right]P=-P_t, \tag{2.65}$$

где μ и k – функции S и t.

Важной особенностью уравнения (2.65) и, следовательно, вытекающих из него формул для опционов является то, что они независимы от выбора λ, интенсивности процесса. Эта характерная черта формул определения стоимости опционов для скачкообразных процессов была впервые показана для процесса (2.46), и с помощью аргументов хеджирования легко увидеть, что интенсивность вообще не играет никакой роли в определении стоимости, так как хеджирующая позиция зависит только от величины скачка. Действительно, после подстановки $\mu(S,\,t)=\mu S$ и $k(S,\,t)=S(k-1)+1$ уравнение (2.65) становится соотношением определения цены опциона для процесса (2.46). Теперь можно использовать уравнение (2.65) для изучения разнообразных скачкообразных процессов.

Пример 2.1. Рассмотрим сначала процесс чистого рождения без дрейфа:

$$dS=\begin{cases}\lambda S dt & \to \quad k-1,\\ 1-\lambda S dt & \to \quad 0.\end{cases} \tag{2.66}$$

В этом случае уравнение (2.65) превращается в следующее

$$r(k-1)^{-1}S[P(S+(k-1),t)-P(S,t)]-rP(S,t)=-P_t(S,t) \qquad (2.67)$$

с $P(S, T) = \max\{S-K, 0\}$. Чтобы решить уравнение (2.67), воспользуемся методом, описанным в § 9. [В качестве проверки нетрудно установить, что (2.67) является преобразованным обратным уравнением для процесса (2.66).] В нейтральной к риску среде ожидаемые доходности, как на акцию, так и на опцион должны быть равны безрисковой ставке, и равенство (2.60) принимает вид

$$E\left[\frac{S_T}{S_0}\right]=e^{\lambda(k-1)(T-1)}=e^{r(T-1)}, \qquad (2.68)$$

или $\lambda(k-1) = r$, где мы применили известный результат из теории процессов рождения. Чтобы получить ожидаемый доход на опцион, нужно использовать функцию распределения для S_T, которая является просто распределением для масштабированного процесса чистого рождения. Отсюда следует, что

$$E\left[\frac{P_T}{P}\right]=\frac{1}{P}E[\max\{S_T-K,0\}]=$$

$$=\frac{1}{P}\sum_{S_T\geq K}(S_T-K)\begin{pmatrix}\dfrac{S_T}{k-1}-1\\ \dfrac{S_t}{k-1}-1\end{pmatrix}\left(e^{-r(T-t)}\right)^{S_t/(k-1)}\left(1-e^{-r(T-t)}\right)^{(S_T-S_t)/(k-1)},$$

и используя равенство (2.68) и требуемое равенство для безрисковой доходности, получаем

$$P(S,t)=S\sum_{j\geq[K/(k-1)+2]}B\left(j;\frac{S}{k-1}+1,e^{-r(T-t)}\right)-$$

$$-Ke^{-r(T-t)}\sum_{j\geq[K/(k-1)+1]}B\left(j;\frac{S}{k-1},e^{-r(T-t)}\right), \qquad (2.69)$$

где $[y]$ – наибольшее целое число, не превышающее y,

$$B(y;x,q)=\begin{pmatrix}y-1\\x-1\end{pmatrix}q^x(1-q)^{y-x},\quad \begin{pmatrix}y-1\\x-1\end{pmatrix}=\frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x)\Gamma(y-x+1)}$$

обозначает отрицательное биномиальное распределение. Этот пример иллюстрирует, как использовать равенство (2.60) в ходе решения. По обоснованию хеджирования интенсивность λ не влияет на определение стоимости опциона. На нейтральном к риску рынке $\lambda = r/(k - 1)$, что позволяет нам исключить λ из формулы определения стоимости опциона (2.69). Важно представлять, что это не влечет того, что можно решить задачу определения стоимости только тогда, когда удовлетворяется равенство (2.68). Наоборот, для заданных r и k решение не зависит от λ, и для любого λ решение будет идентичным решению, когда равенство (2.68) имеет место.

Этот пример также обнаруживает важную особенность решения задачи определения стоимости вообще и для скачкообразных процессов в частности. В точках, где формула (2.69) и последующие решения недифференцируемы, они не могут, конечно, удовлетворять дифференциальным уравнениям вида (2.67). Парадокс разрешается путем уместной модификации (2.67). В точках недифференцируемости P_t, например, в общем случае не охватывает истинную временную компоненту изменения, или градиент, в стоимости опциона. При обосновании хеджирования будет использоваться этот временной градиент, и результатом будет некоторое обобщение дифференциальных уравнений. Полученные решения всюду корректны для этих обобщенных уравнений.

Вместе с тем, к сожалению, никакого общего решения уравнения (2.65) пока не существует, и метод нахождения решения для нейтральной к риску среды не может обойти эту трудность. Поэтому непосредственные обобщения результатов, которые здесь делаются, имеют особую ценность.

Пример 2.2. Предположим, мы попытаемся распространить наши результаты по определению стоимости опционов на случай чисто разрывного процесса (2.66), в котором добавлена пропорциональная функции дрейфа μS, как в уравнении (2.48). Это является важным расширением, поскольку с помощью метода, использованного при рассмотрении уравнений (2.51)–(2.54), процесс (2.48), подобно процессу рождения и гибели, может быть сделан сходящимся к диффузии (2.51) с квадратным корнем.

Чтобы применить наш метод для получения решения дифференциального уравнения определения стоимости (2.65) в рассматриваемом случае, нам требуется знать распределение S_T/S_t при вычислении квазимомента $E\{\max\{S_T - K, 0\}\}$, который дает стоимость опциона. К сожалению, добавление детерминированной функции дрейфа сильно усложняет эту проблему. Причина в том, что процесс неоднородный во времени в том смысле, что вероятность скачка в следующий момент зависит не только от числа предыдущих скачков, но и от того, когда они происходили, т. е. от их временных свойств. Вместе с тем, не входя в нежелательные детали, можно показать, что при задании процесса уравнением (2.48) функция плотности S_T имеет вид

$$\mathrm{prob}\{S_T \in (x, x + dx)\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda(k-1)}{\mu}\right)^n e^{(\lambda/\mu)[S_t + n(k-1) - x]} \int_{A_n} \prod_{i=1}^{n}\left(S_t - \sum_{j=1}^{i-1} x_j\right) x_i^{-2} dx_{ij}, \qquad (2.70)$$

где

$$A_n \equiv \{(x_1, ..., x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = S_t - xe^{-\mu(T-1)},$$
$$-(k-1) \le x_1 \le ... \le x_n \le -(k-1)\, e^{-\mu(T-1)}\}.$$

Теперь можем использовать формулы (2.61) и (2.70) для определения стоимости опциона, но уже не сможем получить решение в замкнутой форме, так как интегралы в формуле (2.70) не вычисляются в явном виде, однако выражение (2.70) можно аппроксимировать для получения численных результатов.

Пример 2.3. В качестве заключительного примера для скачкообразных процессов, который иллюстрирует опасности применения метода решения, рассмотрим задачу определения стоимости опционов для абсолютного процесса (2.52) без дрейфа. Чтобы избежать задачи об ограниченной ответственности и допустить хеджирование одной акции, пусть $\pi^+ = 1$, что соответствует скачкам чистого роста. Просто разрешая (2.60) и используя тот факт, что число скачков в интервале $[t, T]$ имеет пуассоновское распределение, получаем выражение

$$E\left[\frac{S_T}{S_t}\right] = \frac{\lambda(k-1)}{S_t}(T-t) = e^{r(T-t)},$$

которое позволяет найти при опущенном параметре λ как функции S_t текущую стоимость акции. Однако это искажает первоначально введенный абсолютный процесс с λ, не зависящей от текущей стоимости акции. Другими словами, принятый процесс не согласуется с нейтральным к риску рынком. Несмотря на это, мы все еще можем определить стоимость опциона на такой процесс, замечая, что дифференциальное уравнение хеджирования задается уравнением (2.67) так же, как для чистого процесса рождения. Так как параметр интенсивности не играет никакой роли при определении стоимости, это будет другим случаем, нежели (2.68). Тогда решение этой задачи будет таким же, что и для процесса рождения (2.69) без дрейфа, и может быть найдено из уравнения (2.70) с дрейфом. Даже если абсолютный процесс не согласован с нейтральным к риску рынком, дифференциальное уравнение определения стоимости является таким же, как для процесса рождения, который согласован с нейтральностью к риску, что позволит нам оценить абсолютный процесс, какой бы ни была задана структура рыночных предпочтений и других активов, которые будут поддерживать его в равновесии. Эта несогласованность с нейтральностью к риску не применяется к абсолютному процессу с симметричными двухточечными скачками и пропорциональным дрейфом, но рассмотрение подобного случая двухточечных скачков не может быть сделано в контексте хеджирования единственной акции.

Теперь обратимся к задачам об опционах для диффузионных пределов, введенных в § 9.

Альтернативные диффузионные процессы

Сначала нужно получить дифференциальное уравнение, которому должна следовать стоимость опциона для всех диффузионных процессов, а затем конкретизировать его для наших двух случаев. Это делается так же, как и в § 8 для диффузионного процесса (2.45). Здесь мы будем рассматривать конкретную акцию или фирму, которая делает платежи. Платежи могут быть также введены в задачи со скачкообразными процессами, но это может очень усложнить решение.

Предположим, цена акции следует уравнению

$$dS = \mu(S, t)dt + \sigma(S, t)dW,$$

где $\mu(S, t)$ и $\sigma^2(S, t)$ являются соответственно мгновенными средним значением и дисперсией диффузионного процесса.

Применив лемму Ито, можно написать уравнение для цены опциона

$$dP = [P_t + \mu(S, t)P_S + \sigma^2(S, t)\, P_{SS}/2]dt + P_S\sigma(S, t)\, dW.$$

Предположим, на каждую единицу акции выплачиваются дивиденды непрерывным потоком $b(S, t)$. Рассмотрим портфель, в котором содержится единица опциона, некоторая доля α_S акции и некоторая сумма, занятая или данная взаймы, так что совокупная инвестиция равна нулю. Если мы выберем α_S равной $-P_S$, тогда портфель не будет иметь стохастической составляющей, и чтобы предотвратить арбитраж его локальное среднее должно быть равно нулю.

Это означает, что в каждый момент времени три источника изменений в портфеле: детерминированная часть изменения цены акции и опциона, безрисковая доходность на данную (или взятую) в займы сумму и полученные платежи (или платежи, сделанные при возмещении в случае коротких продаж) – должны точно соответствовать один другому. Из этого следует, что составляющая чисто детерминированного изменения цены равна $P_t + \sigma^2(S, t)P_{SS}/2$, доход на облигацию равен $rSP_S - rP$ и возмещение, требуемое для выплат дивидендов на акцию, которыми владеют в связи с короткой продажей, равно $-b(S, t)P_S$. Объединение этих трех слагаемых дает дифференциальное уравнение типа (2.58):

$$\sigma^2(S, t)P_{SS}/2 + [rS - b(S, t)]\, P_S - rP = -P_t. \tag{2.71}$$

Тогда при диффузионном процессе стохастические предположения входят в уравнение определения стоимости только через коэффициент в слагаемом со второй производной, как и следовало ожидать, на основе проведенных ранее рассуждений о соотношении между уравнением определения стоимости и обратным уравнением Колмогорова для рассматриваемого процесса. Также можно заметить, что платежи не влияют на удобство выбора нейтральных к риску предпочтений инвесторов, так как нейтральность к риску просто потребовала бы, чтобы мгновенное среднее полного дохода на акцию было равным rS, поэтому требуемое изменение средней цены было бы равным $\mu(S, t) = rS - b(S, t)$.

В последующем рассмотрим только функции платежей вида $b(S, t) = aS + c$, так как они будут обеспечивать удовлетворительное представление для большинства задач. Мы исследуем также только европейские опционы, хотя для многих стратегий с постоянными дивидендами эквивалентные американские опционы имели бы те же стоимости, поскольку преждевременное исполнение никогда бы не было оптимальным.

Пример 2.4. Сначала рассмотрим случай (2.51), когда дисперсия пропорциональна цене акции. Согласно (2.64) уравнение определения стоимости принимает вид

$$\sigma^2 S\, P_{SS}/2 + [(r-a)S - c]P_S - rP = -P_t. \tag{2.72}$$

Эту задачу можно решать прямыми стандартными аналитическими методами, но легче применить метод решения, использованный выше, если терминальная плотность (в нейтральной к риску постановке) уже известна. К счастью, именно этот случай был приведен при изучении предельного диффузионного случая в работе У. Феллера по процессам рождения и гибели. Условная плотность вероятностей цены S_T при фиксированной S_t для $S_T > 0$ дается выражением

$$f(S_T, T; S_t, t) = \left(\frac{2(r-a)}{\sigma^2\left(e^{(r-a)(T-t)}-1\right)}\right)\left(\frac{S_t e^{(r-a)(T-t)}}{S_T}\right)^{(1+2c/\sigma^2)/2} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{2(r-a)(S_t e^{(r-a)(T-t)} + S_T)}{\sigma^2 (e^{(r-a)(T-t)}-1)}\right)\times$$

$$\times I_{1+2c/\sigma^2}\left(\frac{4(r-a)\sqrt{S_T S_t e^{(r-a)(T-t)}}}{\sigma^2 (e^{(r-a)(T-t)}-1)}\right), \tag{2.73}$$

где $I_q(.)$ является модифицированной функцией Бесселя первого рода порядка q.

Трудно ответить на математический вопрос, можно ли решить стохастическое дифференциальное уравнение для нетривиального стохастического процесса, когда коэффициенты не имеют ограниченных производных. Однако в этом случае уравнение (2.51) было фактически получено из стохастического процесса, задаваемого уравнением (2.73), и никакой такой проблемы не возникает. В более общем случае, если нам задается сам процесс, любое увеличивающее его преобразование (подобное функции P) будет само хорошо определенным процессом с мгновенным средним $[\mu\,(S, t)P_S + P_t + \sigma^2(S, t)\, P_{SS}/2]$ и мгновенной дисперсией $(P_S\sigma(S, t))^2$, если он принадлежит C^2, и будет получаться, даже если он не принадлежит C^2. Этот подход позволяет нам обходить процессы Ито и дополнительные условия регулярности, которые они могут потребовать.

Интегрирование (2.73) по интервалу $S_T > 0$ приводит к вероятности меньше единицы. Остаток до единицы является вероятностью того, что $S_t = 0$ для некоторого $t \le T$; в этом случае S будет «поглощена» нулем. Применяя рассматриваемый способ, мы возьмем математическое ожидание $\max(S_T - K, 0)$ и дисконтируем его ко времени t, как в выражении (2.61), чтобы получить формулу определения стоимости

$$P(S, t) = Se^{-a(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)e^{-y} y^{n+2c/\sigma^2} G(n+2, \theta K)}{\Gamma(n+2+2c/\sigma^2)} -$$

$$- Ke^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-y} y^{n+1+2c/\sigma^2} G(n+1, \theta K)}{\Gamma(n+2+2c/\sigma^2)}, \qquad (2.74)$$

где

$$\theta = \frac{2(r-a)}{\sigma^2 (e^{(r-a)(T-t)} - 1)}, \quad y = \theta\, Se^{-(r-a)(T-t)},$$

а

$$G(m, x) = [\Gamma(m)]^{-1} \int_x^{\infty} e^{-z} z^{m-1} dz$$

является дополнением к стандартной функции гамма-распределения.

Стоимость опциона при $S = 0$ определяется описанием процесса, и никаких дополнительных ограничений делать не нужно. Для процесса с поглощающей границей в нуле мы будем иметь $P(0, t) = 0$.

Пример 2.5. Теперь обратимся к уравнению (2.54), где дисперсия не зависит от цены, тогда уравнение (2.71) принимает вид

$$\sigma^2 P_{SS}/2 + (r-a)SP_S - rP = P_t.$$

Как и в случае (2.72), за эту задачу можно браться прямо, например, путем преобразования к уравнению теплопроводности. Однако снова легче и поучительней использовать знание терминального распределения акции. Изучая уравнение, заметим, что оно аналогично обратному уравнению процесса Орнштейна – Уленбека, физические основы которого лежат в изучении частиц броуновского движения при наличии упругой силы. Это дает некоторый экономический смысл при ограниченной ответственности для цены, которая, достигая нуля, может становиться положительной. Поэтому хотелось бы использовать процесс Орнштейна – Уленбека с поглощающей границей в нуле для процесса с квадратным корнем. Выше мы рассматривали задачи только для $c = 0$, т. е. только при пропорциональных платежах, так как в другом случае соответствующая плотность является неизвестной (и преобразование к уравнению теплопроводности приводит к еще нерешенной задаче с границей, зависящей от времени). В рассматриваемом случае условная плотность S_T при заданной S_t для $S_T > 0$ имеет вид

$$f(S_T, T; S_t, t) = (2\pi Z)^{-1/2}\left[\exp\left(-\frac{[S_T - S_t e^{(r-a)(T-t)}]^2}{2Z}\right) - \right.$$

$$\left. - \exp\left(-\frac{[S_T + S_t e^{(r-a)(T-t)}]^2}{2Z}\right)\right], \qquad Z = \left(\frac{\sigma^2}{2(r-a)}\right)\left(e^{2(r-a)(T-t)} - 1\right).$$

Применение представления (2.61) дает следующую формулу определения стоимости

$$P(S, t) = (Se^{-a(T-t)} - Ke^{-r(T-t)})\Phi(y_1) +$$

$$+ (Se^{-a(T-t)} + Ke^{-r(T-t)})\Phi(y_2) + v[n(y_1) - n(y_2)], \qquad (2.75)$$

где $\Phi(.)$ обозначает стандартную нормальную функцию распределения; $n(.)$ является стандартной нормальной плотностью и

$$v = \sigma\left(\frac{e^{-2a(T-t)} - e^{-2r(T-t)}}{2(r-a)}\right)^{1/2},$$

$$y_1 = \frac{Se^{-a(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}}{v},$$

$$y_2 = \frac{-Se^{-a(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}}{v}.$$

Сравнительная статистика, связанная с изменениями параметров в формулах (2.74) и (2.75), является громоздкой, но в большой степени интуитивной, и мы перейдем к следующему этапу.

Применение к другим ценным бумагам

Хотя выше мы обращали основное внимание на опционы, тот же метод может быть применен к широкому кругу финансовых инструментов. Удобным подходом для определения стоимости обычных ЦБ является предположение о том, что полная стоимость фирмы V следует заданному стохастическому процессу, а затем рассмотрение индивидуальных ЦБ как функций стоимости фирмы и времени. Стоимость индивидуальных ЦБ любой фирмы, полная стоимость которой следует диффузионному процессу, например, должна удовлетворять уравнению такого же вида, как и (2.71). Вместе с тем в отличие от опционов по большинству обычных ЦБ F выплачиваются платежи $b'(V, t)$ и уравнение (2.71) должно быть модифицировано, чтобы включить этот доход:

$$\sigma^2(V, t)\, F_{VV}/2 + [rV - b'(V, t)]\, F_V - rF + b'(V, t) = -F_t. \qquad (2.76)$$

Ценные бумаги данной фирмы могут отличаться терминальными условиями и получаемыми платежами. В качестве конкретного примера рассмотрим фирму, выпустившую одну акцию и одну облигацию. Облигация имеет терминальную стоимость $\min(B, V)$, где B – стоимость облигации при погашении, и по ней выплачивается постоянная сумма c'. Акция имеет терминальное условие $\max(V - B, 0)$, и по ней выплачиваются дивиденды $aV + c''$, где $c' + c'' = c$, что является полной постоянной долей платежей. Для логнормального процесса (2.45) Мертоном (Merton, 1974) исследована задача определения стоимости чисто дисконтируемых фондов фирмы, которая не делает никаких платежей ($a = c = 0$), а Ингерсоллом (Ingersoll, 1975) рассмотрена модель с пропорциональными платежами ($c = 0$).

Чтобы определить стоимость таких ЦБ, полезно представлять полную стоимость любой ценной бумаги как стоимость актива, по которому не получаются никакие платежи, т. е. по нему выплачивается только его терминальный доход, плюс стоимость платежей, которые по нему потенциально будут получены. В обозначениях уравнения (2.76) эти две составляющих будут соответственно: 1) решением уравнения (2.76) без неоднородного слагаемого $b'(V, t)$, но с соответствующими терминальными условиями для ЦБ, и 2) решением уравнения (2.76) в общем случае с нулевыми терминальными условиями $[F(V, T) = 0]$. Если мы ограничимся платежами вида $aV + c$, тогда в дальнейшем сможем расчленить решение 2) на стоимость пропорциональных и стоимость постоянных платежей. Легко видеть, что сумма этих решений является полной стоимостью ЦБ.

При применении рассматриваемого метода решение 1) для любой ЦБ просто дается соотношениями (2.60) и (2.61). Имея решение 1) для всех ЦБ, с помощью результатов Модиглиани – Миллера мы сможем найти стоимость всего потока платежей $aV + c$ путем вычитания суммы этих решений из V. Если полученные платежи от каждой ЦБ j можно записать как долю полных выплат $k_j(aV + c)$ $(\sum k_j = 1)$, тогда из (2.76) с очевидностью следует, что стоимость 2) для каждой ЦБ j будет в k_j раз больше стоимости полных платежей по всем ЦБ. Мы можем тогда получить полное решение, не решая отдельно 2). Этот метод можно использовать, например, если $a = 0$, что соответствовало бы случаю, когда по акции выплачиваются постоянные дивиденды, или $c = 0$, т. е. облигация была бы чисто дисконтируемой облигацией. Вместе с тем в общем случае по ЦБ фирмы выплачиваются различные доли постоянных платежей c и пропорциональных платежей aV, и необходимо иметь прямое решение 2), чтобы определить стоимость таких ЦБ. Однако нам потребовалось бы отдельно определять стоимость полной пропорциональной составляющей и полной постоянной составляющей, так как с помощью уравнения (2.76) стоимость платежей по индивидуальным ЦБ может быть записана как линейная комбинация этих двух слагаемых.

Чтобы решить задачу 2) с помощью этого метода, заметим, что стоимость потока платежей в каждый момент времени в нейтральной к риску среде должна быть равна ее ожидаемой стоимости, дисконтированной к текущему времени. Полная стоимость потока тогда может быть получена обычным способом путем интегрирования по всем моментам времени потока. На этот раз, так как мы установили хеджирование уравнением (2.76), решение будет корректным в общем случае, а не только в нейтральной к риску среде. В каждый момент времени ожидаемая стоимость постоянного потока, скажем, в момент q, будет в c раз больше вероятности того, что платеж будет получен. При стоимости фирмы, заданной на текущий момент времени $t < q$, она будет условной вероятностью того, что фирма не обанкротится в момент времени q. Получим эту вероятность, заменяя T на q в терминальной плотности стоимости фирмы и затем интегрируя эту плотность по $V_q > 0$. Для нашего процесса (2.51) эта вероятность может быть получена из формулы (2.73) как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-y} y^{n+1+2c/\sigma^2}}{\Gamma[n+2+2c/\sigma^2]} = 1 - G[1 + 2c/\sigma^2, y],$$

где в выражении для y T заменяется на q и S – на V. Тогда стоимость всего потока будет определяться интегрированием по q от t до T, что дает результат

$$\int_t^T ce^{-r(q-t)}[1-G(1+2c/\sigma^2, \theta Ve^{(r-a)(q-t)})]dq.$$

Если мы нашли решение 1) для всех ЦБ и решение 2) для постоянной составляющей, то сможем определить стоимость пропорциональной компоненты простым вычитанием их из V. Вместе с тем полезно знать непосредственно стоимость пропорциональной части потока платежей. Ожидаемая стоимость потока aV_q в каждый момент времени q снова может быть получена с помощью плотности и затем дисконтирована обратно к текущему времени. С другой стороны, дисконтированную ожидаемую стоимость можно получить непосредственно в каждом из наших случаев из формул (2.74) и (2.75) путем замены S на V и T на q, и заданием цены исполнения $E = 0$. Тогда можно найти полную стоимость пропорциональной составляющей потока в момент времени t путем интегрирования по q от t до T.

Для случая с дисперсией, пропорциональной стоимости, решение для пропорционального платежа имеет вид

$$\int_t^T aVe^{-a(q-t)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)e^{-y}y^{n+2c/\sigma^2}}{\Gamma(n+2+2c/\sigma^2)}\right)dq, \tag{2.77}$$

где снова в выражении для y величина S заменяется на V, а T – на q.

Если $c = 0$, сумма в скобках равна единице и (2.77) сводится к простому выражению:

$$\int_t^T aVe^{-a(q-t)}dq = V[1-e^{-a(T-t)}]. \tag{2.78}$$

Применив анализ к абсолютной диффузии (2.54), когда $c = 0$, найдем, что выражение (2.78) также является решением в этом случае. На самом деле, анализ уравнения (2.76) показывает, что когда делаются только пропорциональные платежи, формула (2.78) определяет соответствующую стоимость потока платежей для любого диффузионного процесса. Однако при постоянных платежах определение стоимости при пропорциональной составляющей будет зависеть от того, какой процесс рассматривается.

Итак, тип стохастического процесса, описывающего изменение цены акции, крайне важен при определении стоимости опционов. В настоящее время основным средством в литературе по определению цены опционов является логарифмически нормальный диффузионный процесс. В этой главе были введены также несколько отличающиеся скачкообразные и диффузионные процессы и даны решения для предельных диффузионных случаев и для типов скачкообразных процессов с одной ступенькой. Представленные явные решения потенциально имеют эмпирическое применение, и сравнительное изучение их дало бы дополнительное проникновение в структуру проблемы определения стоимости ЦБ. Вместе с тем, помимо существенной ценности изучения нетрадиционных допустимых процессов, ряд важных проблем, включая платежи и банкротство, которые остаются нерешаемыми в аналитической форме для логнормальных процессов, удается разрешить для некоторых других процессов. При получении результатов повсюду в главе использовался экономически интерпретируемый подход при решении проблем опционов, который имеет интуитивную привлекательность и может способствовать решению других задач в этой области.

§ 11. ПРОЦЕСС ЦЕНЫ АКТИВА С ПРОИЗВОЛЬНОЙ НИЖНЕЙ ОТРАЖАЮЩЕЙ ГРАНИЦЕЙ

Обычно чтобы получить аналитические результаты в стохастических задачах определения стоимости ФП предполагают, что процесс цены S_t лежащего в основе финансового актива изменяется согласно геометрическому броуновскому движению, как это было принято в статье Блэка – Шоулса (см. (2.4)):

$$dS_t = \mu\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dW_t.$$

Процесс S_t – нестационарный, так как его дисперсия (при $\sigma > 0$) и математическое ожидание (при $\mu > 0$) неограниченно возрастают. Кроме того, уровень $S_t = 0$ является поглощающей границей для этого процесса, так как, попадая на него, процесс остается нулевым в течение всего последующего времени. Кокс и Росс предложили использовать другой процесс (2.51):

$$dS = \mu S dt + \sigma \sqrt{S}\, dW,$$

который также имеет поглощающую границу $S_t = 0$, хотя дисперсия этого процесса увеличивается со временем не так быстро, как у геометрического броуновского движения. Эти процессы не годятся при решении задач стационарно действующего рынка ЦБ.

Поэтому вместо таких процессов для описания изменения цены лежащего в основе финансового актива А. Терпугов (2001) предлагает использовать процесс возвращающийся к среднему с квадратным корнем (*mean reverting square root process*), введенный в практику финансового анализа в известной статье Кокса, Ингерсолла и Росса (1985) при описании процесса безрисковой процентной ставки (поэтому назовем его условно моделью CIR)

$$dS_t = (\alpha - \beta S_t)\, dt + \sigma \sqrt{S_t}\, dW_t. \tag{2.79}$$

Для такого процесса существует стационарный режим с конечным математическим ожиданием и дисперсией, а уровень $S_t = 0$ является отражающей границей для него, так как, попадая на этот уровень, процесс с вероятностью единица начинает увеличиваться.

Однако более естественно полагать, что нижней границей изменения цены лежащего в основе финансового актива может быть не нуль, а некоторое значение, существенно отличающееся от нуля. Поэтому можно также рассмотреть более общий процесс, называемый моделью МС (см. Медведев, 1999), который с практической точки зрения удобно представить в виде (предложено Н. Илиевой, 2000)

$$dS_t = k(\theta - S_t)dt + \sqrt{2kD\frac{S_t + x}{\theta + x}}\, dW(t), \tag{2.80}$$

где $S_t \geq -x$, а константы имеют следующий смысл:

x – параметр, определяющий нижнюю отражающую границу (она равна $-x$) процесса S_t;

$\theta = E\{S\}$ (для стационарного, т. е. установившегося, режима);

$D = \mathrm{var}\{S\}$ (для стационарного, т. е. установившегося, режима);

$k > 0$ – коэффициент, определяющий скорость перехода к стационарному режиму.

Отличие этой модели от модели (2.79) легко увидеть, если переобозначить $k = \beta$, $\alpha = k\theta$, $\sigma = \sqrt{2kD/(\theta + x)}$. Форма такого представления удобнее, потому что в уравнение входят параметры и константы, имеющие ясный физический смысл.

Заметим, что описанное в статье Илиевой (2000) использование этой модели при статистическом анализе доходностей ЦБ Казначейства США для долгосрочных (от 10 до 30 лет) облигаций дало следующий результат: при средней доходности около 7 % уровень отражающей границы был около 2 %. Отсюда видно, что если финансовая производная основывается на доходности облигаций, то имеет смысл при определении ее стоимости использовать модель МС. Подробный сравнительный анализ вероятностных свойств моделей CIR и МС содержится в другой статье Илиевой (2000).

Введем следующие обозначения:

$V(S, \tau)$ – стоимость ФП в момент t, если наблюдаемое значение цены лежащего в основе финансового актива $S_t = S$, а срок до его погашения $\tau = T - t$. T – дата погашения лежащего в основе финансового актива. $V(S, \tau) = 0$ для всех $S \le 0$. $Y(S, q) = \int_0^\infty V(S,\tau)e^{-q\tau}d\tau$ – преобразование Лапласа от функции стоимости $V(S, \tau)$ по переменной τ. Согласно свойствам функции стоимости $V(S, \tau)$ считаем, что $Y(S, q) = 0$, $\partial Y(S,q)/\partial S = 0$ и $\partial^2 Y(S,q)/\partial S^2 = 0$ для всех $S \le 0$.

$$Z(p, \tau) = \int_{-x}^{\infty} V(S,\tau)e^{-p(S+x)}dS = e^{-px}\int_{0}^{\infty} V(S,\tau)e^{-pS}dS,$$

$$z(p, q) = \int_{-x}^{\infty} Y(S,q)e^{-p(S+x)}dS = e^{-px}\int_{0}^{\infty} Y(S,q)e^{-pS}dS,$$

$$V_0(S) = V(S, 0), \qquad z_0(p) = \int_{-x}^{\infty} V_0(S)e^{-p(S+x)}dS = e^{-px}\int_{0}^{\infty} V_0(S)e^{-pS}dS.$$

Таким образом, функция $V(S, \tau)$ стоимости ФП может быть найдена как обратное преобразование Лапласа функции $Z(p, \tau)$ по переменной p.

Используя обычный прием, можно получить следующие результаты для случая, когда при отсутствии арбитража цена лежащего в основе финансового актива изменяется согласно модели (2.80). Пусть ФП является портфелем, состоящим частично из банковского счета и частично из указанного финансового актива. Тогда в отсутствие арбитража, стоимость такой ФП определяется уравнением в частных производных с краевым условием, которое определяет его стоимость в дату погашения $V(S, 0) = V_0(S)$:

$$-\frac{\partial V}{\partial \tau} + rS\frac{dV}{dS} + \frac{\sigma^2}{2}(S+x)\frac{d^2V}{dS^2} = rV(S,\tau).$$

Здесь и далее для краткости $2kD/(\theta+x)$ обозначено σ^2.

При этом уравнение для функции $Y(S,\ q)$ с учетом того, что $\int_0^\infty \frac{\partial V(S,\tau)}{\partial\tau}e^{-q\tau}d\tau = qY(S,q)-V_0(S)$, имеет вид

$$\frac{\sigma^2}{2}(S+x)\frac{d^2Y}{dS^2}+rS\frac{dY}{dS}-(q+r)Y(S,q)+V_0(S)=0\,.$$

С учетом того, что $Y(S,\ q) = 0$ и $\partial Y(S,q)/\partial S = 0$ для всех $S \le 0$, а также

$$\int_{-x}^\infty \frac{\partial Y(S,q)}{\partial S}e^{-p(S+x)}dS = e^{-px}\int_0^\infty \frac{\partial Y(S,q)}{\partial S}e^{-pS}dS =$$

$$= pz(p,q)-Y(0,q) = pz(p,q)\,,$$

$$\int_{-x}^\infty \frac{\partial^2 Y(S,q)}{\partial S^2}e^{-p(S+x)}dS = p^2 z(p,q)\,,$$

$$\int_{-x}^\infty S\,\frac{\partial Y(S,q)}{\partial S}e^{-p(S+x)}dS = -(1+px)z(p,q)-p\,\frac{\partial z(p,q)}{\partial p}\,,$$

$$\int_{-x}^\infty S\,\frac{\partial^2 Y(S,q)}{\partial S^2}e^{-p(S+x)}dS = -p^2\,\frac{\partial z(p,q)}{\partial p}-(2+px)pz(p,q)\,,$$

уравнение для функции $z(p,\ q)$ получается в виде

$$\left(rp+\frac{\sigma^2}{2}p^2\right)\frac{dz}{dp}+(q+2r+p\sigma^2+rpx)z(p,q)=z_0(p)\,. \quad (2.81)$$

Симметричная форма однородного уравнения (2.81) имеет вид

$$\frac{dz}{z} = -\frac{q+2r+p\sigma^2+rpx}{rp+\sigma^2p^2/2}\ dp\,,$$

что можно записать как

$$\frac{dz}{z} = -\frac{q+2r}{r}\frac{dp}{p}-\left(\frac{2rx}{\sigma^2}-\frac{q}{r}\right)\frac{dp}{p+2r/\sigma^2}\,.$$

Отсюда получаем решение однородного уравнения в форме

$$\ln z = \left(-\frac{q+2r}{r}\ln p - \left(\frac{2rx}{\sigma^2} - \frac{q}{r} \right) \ln\left(p + \frac{2r}{\sigma^2} \right) \right) + \ln C\,.$$

Если для краткости положить $a = 2r/\sigma^2 = r(\theta + x)/(kD)$, это выражение можно записать в виде

$$z = C\frac{(p+a)^{-ax+q/r}}{p^{2+q/r}}\,.$$

Наконец, считая константу C зависимой от p и подставляя выражение для z в таком в виде в неоднородное уравнение (2.81), получим дифференциальное уравнение для определения функции $C(p)$ в форме

$$\frac{dC}{dp} = \frac{a}{r}\frac{p^{1+q/r} z_0(p)}{(p+a)^{1-ax+q/r}}\,.$$

Отсюда непосредственно получаем $C(p) = \dfrac{a}{r}\displaystyle\int_0^p \frac{t^{1+q/r} z_0(t)}{(t+a)^{1-ax+q/r}}\,dt.$

Таким образом, решение уравнения (2.81) имеет вид

$$z(p,\, q) = \frac{a(p+a)^{-ax}}{rp^2}\int_0^p \left(\frac{(p+a)t}{p(t+a)} \right)^{q/r} \frac{tz_0(t)dt}{(t+a)^{1-ax}}\,,$$

где $a = 2r/\sigma^2 = r(\theta + x)/(kD)$.

Теперь вспомним, что $z(p,\, q)$ – это преобразование Лапласа от $Y(S,\, q)$ по S, которое в свою очередь является преобразованием Лапласа от $V(S,\, \tau)$ по τ. Переменная q в выражении для $z(p,\, q)$ встречается только в показателе подынтегрального выражения. Заметим, что преобразование Лапласа от показательной функции c^q является дельта-функцией, т. е. равна $\delta(\tau + \ln c)$. Поэтому обратное преобразование Лапласа от функции $z(p,\, q)$ по q имеет вид

$$Z(p,\, \tau) = \frac{a(p+a)^{-ax}}{rp^2}\int_0^p \delta\left(\tau - \frac{1}{r}\ln\left(\frac{p(t+a)}{(p+a)t} \right) \right) \frac{tz_0(t)dt}{(t+a)^{1-ax}}\,. \qquad (2.82)$$

При замене переменной интегрирования с t на $u = \frac{1}{r}\ln\left(\frac{p(t+a)}{t(p+a)}\right)$ пределы интегрирования становятся от 0 до $+\infty$, $t = \frac{ap}{p(e^{ur}-1)+ae^{ur}}$ и поэтому $dt = \frac{-apre^{ur}(p+a)du}{[p(e^{ur}-1)+ae^{ur}]^2}$. Так что

$$Z(p,\tau) =$$

$$= \frac{a(p+a)^{-ax}}{rp^2}\int_0^{\infty}\delta(\tau-u)\frac{a^{1+ax}p^2r(p+a)^{ax}e^{urax}}{[p(e^{ur}-1)+ae^{ur}]^{2+ax}}z_0\left(\frac{ap}{p(e^{ur}-1)+ae^{ur}}\right)du.$$

Далее, согласно свойствам дельта-функции при положительном сроке погашения $\tau > 0$, интеграл в равенстве (2.82) легко вычисляется, а обратное преобразование Лапласа функции $z(p, q)$ по переменной q принимает вид

$$Z(p, \tau) = e^{r\tau ax}\left(\frac{a}{p(e^{r\tau}-1)+ae^{r\tau}}\right)^{2+ax} z_0\left(\frac{ap}{p(e^{r\tau}-1)+ae^{r\tau}}\right). \quad (2.83)$$

Из трех сомножителей в (2.83) два первых зависят от x, что отражает влияние свойств модели (2.80). Естественно, что при $x = 0$ различия между моделями (2.79) и (2.80) исчезают и исчезает отличие (2.83) от результата Терпугова.

Значения параметра x, имеющие практический смысл (т. е. обеспечивающие неотрицательность для цены S_t), лежат в интервале $(-\theta, 0)$. Заметим также, что уровень $S_t = -x$ является отражающей границей (см. Илиева, 2000) только тогда, когда выполняется дополнительное условие $(\theta + x)^2 > D$. При $x = 0$ оно выполняется, если стандартное отклонение цены актива будет меньше среднего ее значения (что на практике обычно всегда выполняется). Поэтому существует некоторая «ниша» для применения модели (2.80) при определении цен финансовых производных, когда $\sqrt{D} - \theta < x < 0$.

Поскольку функции платежей для фьючерсов и опционов-колл имеют соответственно вид $V_0(S) = S - K$ и $V_0(S) = \max\{0, S - K\}$, где K –

цена исполнения контракта, для преобразований Лапласа этих функций имеем соответственно равенства

$$z_0(p)=\left(\frac{1}{p^2}-\frac{K}{p}\right)e^{-px} \quad \text{и} \quad z_0(p)=\frac{1}{p^2}e^{-p(K+x)}.$$

Подставляя эти функции в (2.83), получаем в случае фьючерсов

$$Z_{\Phi}(p,\tau)=e^{-B_{\Phi}}\left[\frac{1}{p^2}\left(\frac{A}{p+A}\right)^{ax}-\frac{Ke^{-r\tau}}{p}\left(\frac{A}{p+A}\right)^{ax+1}\right]e^{\frac{AB_{\Phi}}{p+A}}, \quad (2.84)$$

где обозначено $A = ae^{r\tau}\big/(e^{r\tau}-1)$, $B_{\Phi} = ax\big/(e^{r\tau}-1)$, и в случае опционов-колл

$$Z_{\text{ОК}}(p,\tau)=e^{-B_{\text{ОК}}}\,\frac{1}{p^2}\left(\frac{A}{p+A}\right)^{ax} e^{\frac{AB_{\text{ОК}}}{p+A}}, \qquad (2.85)$$

где $B_{\text{ОК}} = a(x+K)\big/(e^{r\tau}-1)$.

Для получения обратного преобразования функций $Z_{\Phi}(p,\tau)$ и $Z_{\text{ОК}}(p,\tau)$ можно воспользоваться следующими известными формулами для обратных преобразований (Бейтмен и Эрдейли, 1969):

$$\text{Если } f(S)\Leftrightarrow g(p), \text{ то } f(S+A)\Leftrightarrow e^{-pA}g(p),$$

$$\frac{1}{p^n}g(p)\Leftrightarrow\int_0^S\ldots\int_0^S f(t)(dt)^n\equiv\int_0^S dt_1\int_0^{t_1}dt_2\ldots\int_0^{t_{n-1}}f(t_n)dt_n,$$

$$1\Leftrightarrow\delta(S), \quad \frac{1}{p}\Leftrightarrow 1, \quad \frac{1}{p^2}\Leftrightarrow S,$$

$$\exp\left(\frac{\alpha}{p}\right)-1\Leftrightarrow\left(\frac{\alpha}{S}\right)^{1/2}I_1\left(2\sqrt{\alpha S}\right),$$

$$\frac{1}{p^{1+\nu}}\exp\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{S}{\alpha}\right)^{\nu/2}I_\nu\left(2\sqrt{\alpha S}\right), \quad \nu>-1.$$

Используя эти соотношения, из формулы (2.84) можно получить стоимость фьючерса в виде

$$V_{\Phi}(S,\tau)=\frac{1}{A}\int\limits_{0}^{AS} e^{-t-B_{\Phi}}\left(\frac{t}{B_{\Phi}}\right)^{(ax-1)/2}\times$$

$$\times(1+AS-AKe^{-r\tau}-t)I_{ax}(2\sqrt{B_{\Phi}t})dt.$$

Стоимость опциона-колл для $ax > 0$ получается с помощью функции (2.85) в виде

$$V_{\text{ОК}}(S,\tau)=\frac{1}{A}\int\limits_{0}^{AS} e^{-t-B_{\text{ОК}}}\left(\frac{t}{B_{\text{ОК}}}\right)^{(ax-1)/2}(AS-t)I_{ax-1}(2\sqrt{B_{\text{ОК}}t})dt.$$

ГЛАВА
3

МАРТИНГАЛЫ И АРБИТРАЖ НА РЫНКАХ ЦЕННЫХ БУМАГ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В главе излагаются некоторые основополагающие проблемы, которые возникают в связи с арбитражной теорией определения цен финансовых производных (ФП). В этой теории, начало которой было положено Ф. Блэком и М. Шоулсом (Black, Scholes, 1973) и Р. Мертоном (Merton, 1973), принимается заданной динамика цен некоторых ценных бумаг (*securities*) типа акций (*stocks*) и облигаций (*bonds*). На их основе с помощью арбитражных рассуждений предлагается определять цены других зависимых выплат (*contingent claims*), т. е. ФП типа опционов (*options*) на акции. Это неявно предполагает, что существует единственная цена за конкретную ФП, которая вместе с заданными ценами на ценные бумаги (ЦБ) исключает возможность получения арбитражной прибыли.

В главе содержится достаточно общая теория определения цен ФП по этому способу. Вначале (см. § 2) рассматривается общая теория арбитража в стохастической экономике с двумя датами, за которые принимаются $t = 0$ и $t = T$. Задается вероятностное пространство (Ω, F, P), где элементы $\omega \in \Omega$ представляют собой состояния среды. Исходная вероятностная мера P при необходимости может интерпретироваться как множество субъективных оценок вероятностей относительно состояний среды. Считается, что имеется только одно потребление товаров, и рыночные агенты заинтересованы в определенном детерминированном потреблении в дату $t = 0$ и заявляют случайное потребление в дату $t = T$. Таким образом, мы будем рассматривать в основном пары потребления вида $(r, x) \in R \times X$, где R − множество вещественных чисел и X − пространство случайных величин на (Ω, F). Здесь пара (r, x) представляет собой r единиц потребления в дату $t = 0$ и $x(\omega)$ единиц потребления в дату T в состоянии ω.

Рыночные агенты определяются своими предпочтениями в $R \times X$, которые интерпретируются как предпочтения среди *векторов чистой* *торговли* (*net trade vectors*). Более явно предпочтения агентов задаются полным и транзитивным бинарным отношением $\succ$ на $R \times X$, которое считается выпуклым, непрерывным и строго возрастающим в смысле, который будет уточнен.

Система цен (*price system*) для такой экономики определяется как пара (M, π), где M – подпространство X и π – линейный функционал на M. Интерпретацией является то, что агенты могут купить любую пару потребления $(r, m) \in R \times M$ по цене $r + \pi(m)$ (в единицах потребления на дату $t = 0$). Задавая M как подпространство и π как линейный функционал, принимаем *отсутствие вязкости рынка* (*frictionless market*), т. е. отсутствие каких-либо *операционных затрат* (*transaction costs*) и ограничений на *короткие продажи* (*short sales*). Система цен (M, π) считается *жизнеспособной* (*viable*), если существует агент (представленный отношением предпочтения $\succ$) и пара потребления $(r^*, m^*) \in R \times M$, удовлетворяющие условиям

$$r^* + \pi(m^*) \le 0 \text{ и } (r^*, m^*) \succ (r, m) \text{ для всех } (r, m) \in R \times M \text{ таких, что } r + \pi(m) \le 0. \quad (3.1)$$

Так как (r, m) – вектор чистой торговли, условие $r + \pi(m) \le 0$ является ограничением бюджета агента. Таким образом, соотношение (3.1) есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы система цен (M, π) была жизнеспособной как *модель экономического равновесия* (*model of an economic equilibrium*). Эквивалентное условие установлено в теореме 3.1. Система цен (M, π) будет жизнеспособной, если и только если существует непрерывное и строго положительное расширение π на все X.

При заданной жизнеспособной системе цен (M, π) и ФП $x \in X$ какую цену потребления в дату $t = 0$ можно было бы назначить для x? Если x продается за цену p, агенты могли бы купить любую ФП вида $m + \lambda x$ по цене $\pi(m) + \lambda p$ (для $m \in M$ и вещественной λ). Поэтому естественно говорить, что цена p для ФП x *совместима* (*is consistent*) с (M, π), если эта расширенная система цен жизнеспособна. Говорят, что цена ФП x *определяется через арбитраж* (*priced by arbitrage*), если имеется единственная цена за x, которая совместима с (M, π): в этом случае такая совместимая единственная цена называется *арбитражной стоимостью* (*arbitrage value*) x. Как следствие теоремы 3.1, цена x будет определяться через арбитраж, если и только если она имеет одинаковую стоимость при всяком непрерывном и строго положительном линейном расширении на все X, в таком случае эта общая стоимость является арбитражной стоимостью ФП.

В § 3 эти общие концепции применяются к моделям многопериодного рынка ЦБ. При заданных (Ω, F, P) и T *модель рынка ценных бумаг* (*securities market model*) состоит из *множества торговых дат* (*trading dates*) $\mathbf{T} \subseteq [0, T]$, *информационной структуры* (*information structure*), представленной увеличивающимся семейством под-σ-алгебр, и векторного стохастического процесса $Z = \{Z(t); t \in \mathbf{T}\}$, который определяет цены конечного множества торгуемых ценных бумаг для каждой даты $t \in \mathbf{T}$ и каждого состояния $\omega \in \Omega$. Предположим, что одна из этих ЦБ является безрисковой облигацией и что ставка доходности облигации равна нулю. (Это не влечет за собой какой-либо значительной потери общности, как показано ниже в § 7.)

Далее будет рассмотрено, как агенты могут использовать торгуемые ценные бумаги, чтобы изменять потребление между нулевой датой и T. Мы потребуем (несколько произвольно), чтобы агенты пользовались только «*простыми торговыми стратегиями*» (*simple trading strategies*). Ключевое ограничение – это то, что агент может изменять содержание своего портфеля ЦБ только в конечном числе N предварительно определенных торговых дат, хотя N может быть произвольно большим (если **T** неограниченно). Простая торговая стратегия называется *самофинансирующей* (*self-financing*), если стоимость любой покупки ЦБ после нулевой даты точно равна доходу, произведенному одновременной продажей некоторых других ценных бумаг, и если любая продажа аналогично согласована с некоторой покупкой. Поскольку эти торговые стратегии не получают и не производят финансирования между нулевой датой и T, они представляют средства, доступные агентам, для изменения потребления между нулевой датой и T, а также порождают пространство M неявно торгуемых ФП и цен π на эти ФП, к которым могут применяться результаты из § 2.

Таким образом, модель рынка ЦБ жизнеспособна, если соответствующая система цен (M, π) жизнеспособна, и цена ФП определяется через арбитраж из жизнеспособной модели рынка ценных бумаг, если ее цена определяется из соответствующей (M, π), и т. д.

Для вышеописанной модели рынка ЦБ *эквивалентная мартингальная мера* (*equivalent martingale measure*) является вероятностной мерой Q на (Ω, F), имеющей три свойства. Первое – формальное. Второе – это то, что P и Q эквивалентные, когда $Q(B) > 0$, если и только если $P(B) > 0$. Третье свойство заключается в том, что процесс цен Z становится (векторным) мартингалом, когда P заменяется на Q. Таким образом, переход от P к Q представляет собой перераспределение вероятностной массы, которое заставляет каждую ЦБ зарабатывать (в среднем) по безрисковой нулевой ставке без изменения множества событий, имеющих положительную вероятность. Пусть (M, π) будет системой цен, соответствующей заданной модели рынка ЦБ. Теорема 3.2 устанавливает взаимно однозначное соответствие между эквивалентной мартингальной мерой Q и теми непрерывными и строго положительными линейными функционалами, которые расширяют π на все X. Это соответствие задается соотношениями

$$\psi(x) = E^*(x) \text{ для } x \in X \text{ и } Q(B) = \psi(1_B) \text{ для } B \in F,$$

где E^* – оператор математического ожидания по мере Q.

Объединяя это с более ранними результатами, приходим к следующему. Модель рынка ЦБ жизнеспособна, если и только если существует, по крайней мере, одна эквивалентная мартингальная мера для нее. Для жизнеспособной модели рынка ЦБ цена ФП x определяется через арбитраж, если и только если x имеет одинаковое математическое ожидание по каждой эквивалентной мартингальной мере. В таком случае арбитражная стоимость x является общим математическим ожиданием.

Чтобы проиллюстрировать эти рассуждения, применим их в § 4 к случаю, когда $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{T}$ будут конечны. В § 5 будет рассмотрен гораздо более сложный случай, когда $\mathbf{T} = [0, T]$ и Z – векторный диффузионный процесс. При умеренных предположениях регулярности (теорема 3.3) существует единственная эквивалентная мартингальная мера. Таким образом, модель жизнеспособна и цена каждой ФП (в зависимости от прошлого развития цены произвольным способом) определяется через арбитраж. Преобразование к эквивалентной мартингальной мере выполняется просто обнулением дрейфа первоначальной модели. Таким образом, все арбитражные стоимости, в принципе, могут быть вычислены.

На теорию, развитую в § 3, сильно влияет принятое ограничение классом простых торговых стратегий. Это ограничение сделано по техническим причинам и не может быть полностью оправдано экономическими соображениями. В § 6 обсудим различные альтернативные подходы, которые могли бы быть приняты, и проиллюстрируем ловушки, которых следует избегать, если моделировать непосредственно непрерывную торговлю (или, иначе, расширять класс торговых стратегий, допустимых для агентов).

Обобщения изложенной теории обсуждаются в § 7, где указывается, как применять рассмотренные результаты, когда не имеется безрисковой ЦБ с нулевой процентной ставкой, ФП могут оплачиваться в многократные и/или изменяющиеся даты и желательно определить цену опциона (такого как американский пут), когда владелец имеет некоторый свободный выбор относительно времени и/или размера выплаты. Обсуждается также технический вопрос относительно топологии, в которой предпочтения агентов предполагаются непрерывными.

§ 2. ЖИЗНЕСПОСОБНОСТЬ И АРБИТРАЖ

Как сказано в § 1, вероятностное пространство (Ω, F, P) и две даты ($t = 0$ и $t = T$) являются заданными. В качестве пространства ФП X, погашаемых в дату T, возьмем пространство F-измеримых интегрируемых в квадрате случайных величин, т. е. $X = L^2(\Omega, F, P)$. Это ограничение об интегрируемости в квадрате ФП сделано для наглядности и математической простоты. Оно не является необходимым для большинства выводов, обобщение которых рассмотрено в § 7.

Агенты характеризуются своими предпочтениями в пространстве чистых сделок $R \times X$. Такие предпочтения представлены математически полными и транзитивными бинарными отношениями $\succ$ на $R \times X$. (Обычным способом $\succ\succ$ обозначается строгое предпочтение, определенное из $\succ$.) Предпочтения агентов в этой экономике принимаются, чтобы удовлетворить три требования. Во-первых, они выпуклы.

$$\text{Для всех } (r, x) \in R \times X, \text{ множество } \{(r', x') \in R \times X : (r', x') \succ (r, x)\} \text{ является выпуклым.} \tag{3.2}$$

Во-вторых, они непрерывны в следующем смысле. Пусть τ будет топологией произведения на $R \times X$, полученной из евклидовой топологии на R и топологии с L^2 нормой на X.

$$\text{Для всех } (r, x) \in R \times X \text{ множества}$$
$$\{(r', x') \in R \times X\colon (r', x') \succ (r, x)\}$$
$$\text{и } \{(r', x') \in R \times X\colon (r, x) \succ (r', x')\}$$
$$\text{являются } \tau \text{ замкнутыми.} \tag{3.3}$$

В-третьих, они строго возрастают в следующем смысле. Пусть X^+ будет множеством ФП x, для которых $P(x \geq 0) = 1$ и $P(x > 0) > 0$.

$$\text{Для всех } (r, x) \in R \times X,\ r' \in (0, \infty) \text{ и } x' \in X^+$$
$$(r + r', x) \succ\succ (r, x) \text{ и } (r, x + x') \succ\succ (r, x). \tag{3.4}$$

Другими словами, если мы начинаем с чистой торговли (r, x) и добавляем к этому или положительную сумму потребления в нулевой момент времени, или ФП $x \in X^+$, которая не уменьшает потребление в момент времени T, но может увеличивать его, тогда результирующий вектор чистых сделок является строго предпочтительным по отношению к исходному. Множество полных и транзитивных бинарных отношений $\succ$ на $R \times X$, которые удовлетворяют условиям (3.2), (3.3) и (3.4), обозначается через **A**. Таким образом, **A** представляет *класс потенциальных агентов*.

Для того чтобы проиллюстрировать роль вероятностной меры P в разрабатываемой теории, рассмотрим следующий частный случай. Предположим, что существует вероятностная мера Q на (Ω, F) и функция u: $R \times R \to R$ такая, что $\succ$ задается соотношением

$$(r, x) \succ (r', x'), \text{ если } \int u(r, x(\omega))\, Q(d\omega) \geq \int u(r', x'(\omega))\, Q(d\omega).$$

(Это предполагает, что u и Q достаточно хорошо ведут себя, поэтому все интегралы приведенного вида существуют и конечны.) Для того чтобы $\succ$ принадлежало **A**, достаточно, чтобы u была вогнутой, строго возрастающей и возрастала по абсолютной величине, но не сильнее, чем, как квадрат, чтобы Q и P имели одинаковые пустые множества и чтобы производная dQ/dP была ограниченной. Этот пример показывает, что мера P выполняет три функции: определяет пространство X ФП, определяет требование непрерывности для предпочтений $\succ\ \in$ **A**, и через свои пустые множества она формулирует требование, чтобы $\succ\, \in \mathbf{A}$ строго увеличивалось.

Система цен – это подпространство M из X и линейный функционал π на M. Интерпретацией является то, что в этой экономике агенты способны покупать и продавать какие-либо ФП по стоимости потребления в нулевую дату. Рынки, в которых так можно сделать, являются *невязкими* (*frictionless*). Это означает, что там нет никаких операционных затрат и никаких ограничений на короткие продажи. Таким образом, M представляет собой подпространство торгуемых ФП (которое будет меньше, чем X, если рынки неполные) и π задает цены для ФП $m \in M$ в единицах потребления в нулевую дату.

При заданной системе цен (M, π) действительно ли эта система жизнеспособна как модель экономического равновесия для агентов из класса $\mathbf{A}$? Формально говоря, система цен (M, π) является *жизнеспособной*, если существуют какие-либо $\succ\, \in \mathbf{A}$ и $(r^*, m^*) \in R \times M$, удовлетворяющие условиям

$$r^* + \pi\,(m^*) \le 0 \text{ и } (r^*, m^*) \succ (r, m) \text{ для всех } (r, m) \in R \times M \text{ таких, что } r + \pi\,(m) \le 0. \tag{3.5}$$

Это соответствует тому, что имеется некоторый агент из класса $\mathbf{A}$, который, выбирая наилучшие чистые сделки, ограниченные его бюджетом $r + \pi\,(m) \le 0$, способен найти оптимальную торговлю. Необходимость этого условия очевидна. Оно также достаточно в следующем смысле. При заданном агенте $\succ\, \in \mathbf{A}$ и $(r^*, m^*) \in R \times M$, удовлетворяющем (3.5), определим отношение $\succ'$ на $R \times X$:

$$(r, x) \succ' (r', x'), \text{ если } (r + r^*, x + m^*) \succ (r' + r^*, x' + m^*).$$

Тогда $\succ'\, \in \mathbf{A}$, и агент с предпочтением $\succ'$ слабо предпочитает $(0, 0)$ каждой чистой сделке $(r, m) \in R \times M$, такой что $r + \pi\,(m) \le 0$. Таким образом, (M, π) является системой цен равновесия для экономики, населенной агентами из класса **A.** В экономике, где все агенты имеют предпочтение $\succ'$, при ценах π каждый агент удовлетворен, оставаясь в своей точке вклада.

Следующая теорема характеризует жизнеспособные системы цен в терминах непрерывных (по топологии, порожденной нормой в L^2) линейных функционалов на X. Такой линейный функционал ψ называется *строго положительным*, если $\psi\,(x) > 0$ для всех $x \in X^+$. Пусть

Ψ обозначает множество всех непрерывных и строго положительных линейных функционалов на X.

Теорема 3.1. Система цен (M, π) является жизнеспособной, если и только если существует расширение π на все X, которые принадлежат Ψ. (В дальнейшем будем использовать символику $\psi \mid M$ для обозначения условия, что ψ берется из M, и поэтому условие теоремы может быть перефразировано следующим образом: существует $\psi \in \Psi$ такой, что $\psi \mid M = \pi$.)

Доказательство. Предположим, система цен (M, π) является такой, что существует $\psi \in \Psi$, удовлетворяющий условию $\psi \mid M = \pi$. Тогда определим на $R \times X$ отношение $\succ$ в виде

$$(r, x) \succ (r', x'), \text{ если } r + \psi(x) \geq r' + \psi(x').$$

Легко видеть, что таким образом определенное отношение $\succ$ принадлежит **A** и что это $\succ$ и выбор $(r^*, m^*) = (0, 0)$ удовлетворяют условию (3.5). Следовательно, (M, π) жизнеспособна.

Предположим, что (M, π) является жизнеспособной. Пусть $\succ \in$ **A** и (r^*, m^*) будут такими, что условие (3.5) имеет место. Предыдущее обсуждение показывает, что без потери общности можно принять равенство $(r^*, m^*) = (0, 0)$. Определим множества:

$$G = \{(r, x) \in R \times X: (r, x) \succ\succ (0, 0)\}$$

$$H = \{(r, m) \in R \times M: r + \pi(m) \leq 0\}.$$

Множества G и H являются непересекающимися ввиду условия (3.5), выпуклыми (G – поскольку предпочтения выпуклые) и G – открытое, поскольку предпочтения непрерывные. Таким образом, существует нетривиальный непрерывный линейный функционал φ на $R \times M$ такой, что $\varphi(r, x) \geq 0$ для $(r, x) \in G$ и $\varphi(r, x) \leq 0$ для $(r, x) \in H$. Это одна из версий теоремы об отделимости гиперплоскости.

Мы утверждаем, что $\varphi(1, 0) > 0$. Чтобы увидеть это, заметим, что имеется некоторое (r', x') такое, что $\varphi(r', x') > 0$, поскольку φ является нетривиальным. Так как $\succ \in$ **A**, имеем $(1, 0) \succ\succ (0, 0)$. Таким образом, ввиду непрерывности $\succ$ существует достаточно малое $\lambda > 0$ такое, что $(1 - \lambda r', -\lambda x') \succ\succ (0, 0)$. Поэтому

$$\varphi(1 - \lambda r', -\lambda x') = \varphi(1, 0) - \lambda\, \varphi(r', x') \geq 0$$

и $\varphi(1, 0) \geq \lambda\, \varphi(r', x') > 0$. Нормируем φ так, чтобы $\varphi(1, 0) = 1$, и запишем $\varphi(r, x) = r + \psi(x)$, где ψ является непрерывным линейным функционалом на X.

Мы утверждаем, что функционал ψ строго положителен. Действительно, для ФП $x \in X^+$ имеем $(0, x) \succ\succ (0, 0)$. Таким образом, существует $\lambda > 0$ такое, что $(-\lambda, x) \succ\succ (0, 0)$. Отсюда следует, что $\psi(x) - \lambda \geq 0$ или $\psi(x) \geq \lambda > 0$.

Мы утверждаем, что $\psi \mid M = \pi$. Для ФП $m \in M$ заметим, что как $(-\pi(m), m)$, так и $(\pi(m), -m)$ принадлежат H. Значит, справедливы равенства $0 = \varphi(\pi(m), -m) = \pi(m) - \psi(m)$, или $\pi(m) = \psi(m)$, что и завершает доказательство.

Эта эквивалентная характеризация жизнеспособности имеет частичное равновесие – общее равновесие, благоприятное к ней. Представим экономику, где рынки существуют для всех исков $x \in X$, одна часть этой экономики является рынком, где иски $m \in M$ могут быть куплены или проданы по ценам π. Тогда эти цены должны быть частью общей равновесной системы цен ψ для всего X. И поскольку агенты принадлежат классу **A**, эти общие равновесные цены должны быть непрерывными и строго положительными.

Предположим, что задана жизнеспособная система цен (M, π). За какие цены могли бы быть проданы другие ФП, т. е. ФП $x \notin M$? Если бы ФП x продавалась по цене p, рыночные агенты могли бы купить любую ФП $m + \lambda x \in \mathrm{span}(M \cup \{x\})$ по цене $\pi(m) + \lambda p$. Обозначая символом M' расширение $\mathrm{span}(M \cup \{x\})$ и символом π' расширенный линейный функционал $\pi'(m + \lambda x) = \pi(m) + \lambda p$, естественно говорить, что цена p для *x совместима с системой цен* (M, π), если (M', π') жизнеспособна. Непосредственно из теоремы 3.1 имеем следующее следствие.

Следствие 3.1. Если система цен (M, π) жизнеспособна, тогда для всех $x \in X$ существует цена, которая совместима с системой (M, π). Кроме того, для жизнеспособной (M, π) множество цен для x, совместимых с (M, π), является множеством $\{\psi(x) : \psi \in \Psi \text{ и } \psi \mid M = \pi\}$.

Когда имеется единственная цена за иск x, совместимая с (M, π), мы говорим, что цена *x определяется арбитражем* (*determined by arbitrage*) из (M, π), и эта единственная цена иска x называется *арбитражной стоимостью* (*arbitrage value*) ФП x, определяемой из (M, π).

Следствие 3.2. Если система цен (M, π) жизнеспособна, тогда цена иска $x \in X$ определяется арбитражем (*is determined by arbitrage*), если и только если множество $\{\psi\ (x)\colon \psi \in \Psi$ и $\psi \mid M = \pi\}$ является одноэлементным множеством (*singleton*), и в таком случае этот единственный элемент – *арбитражная стоимость* ФП x.

Для заданной жизнеспособной системы цен (M, π) пусть $\widehat{M}$ будет множеством всех ФП, чьи цены определяются арбитражем. Пусть $\hat{\pi}(x)$ обозначает арбитражную стоимость иска $x \in \widehat{M}$. Если X конечномерное (что будет иметь место, если Ω конечно), можно показать, что $\widehat{M} = M$. Если X бесконечномерное (что будет обычно иметь место, если Ω неограниченное), из следствия 3.2 следует, что $\widehat{M}$ содержит, по крайней мере, τ замыкание (*closure*) M, и оно может содержать также другие иски. Поскольку здесь мы в первую очередь интересуемся многопериодными рынками ЦБ, то далее не будем развивать общие концепции жизнеспособности и арбитража, считая их разработанными.

§ 3. МОДЕЛИ РЫНКА ЦЕННЫХ БУМАГ

Как заявлено ранее, дополнительными первичными объектами, требуемыми для нашей модели рынка ЦБ, являются множество дат торговли, информационная структура и процесс цен. Даты торговли составляют множество $\mathbf{T} \subseteq [0, T]$ и $0, T \in \mathbf{T}$. Интерпретируем $\mathbf{T}$ как семейство моментов времени, в которые можно торговать определенными (пока еще не указанными) ценными бумагами. Термины *дискретное время* и *непрерывное время* относятся к случаям, когда соответственно $\mathbf{T}$ является конечным и $\mathbf{T} = [0, T]$.

Информационная структура дается увеличивающимся семейством под-σ-алгебр. Для удобства предположим, что семейство F_0 есть тривиальная σ-алгебра $\{\varnothing, \Omega\}$ и что $F_T = F$. Интерпретируем F_t как класс всех событий B таких, о которых агенты способны сказать во время t, находится ли истинное состояние среды в B. Другими словами, F_t представляет информацию, доступную во время t. Процесс цен является $(K + 1)$-мерным стохастическим процессом $Z = \{Z(t);\ t \in \mathbf{T}\}$, который адаптирован к $\{F_t\}$. Компоненты $Z(t)$ обозначаются $Z_k(t)$ для $k = 0, 1,..., K$. Интерпретируем $K + 1$ как число ЦБ, которыми торгуют на этом рынке, а $Z_k(t, \omega)$ как цену ЦБ типа k в момент времени t, если среда находится в состоянии ω. Предположение, что Z адаптировано к

$\{F_t\}$, просто означает, что среди информации, доступной в момент времени t, имеются цены для всех ЦБ, которыми торгуют. Мы пока считаем, что эти ЦБ не производят никакого дохода типа дивидендов, и также предполагаем, что $Z_0(t, \omega) = 1$ для всех t и ω. Последнее предположение означает, что нулевая ЦБ является безрисковым активом (облигацией) с нулевой процентной ставкой. Это кажется очень ограничительным, однако это не так (см. § 7). Наконец примем, что $E(Z_k^2(t)) < \infty$ для всех $t \in \mathbf{T}$ и $k = 1,..., K$.

В дальнейшем совокупность, составленную из вероятностного пространства (Ω, F, P), множества торговых дат $\mathbf{T}$, информационной структуры $\{F_t\}$ и процесса цен Z, назовем *моделью рынка ценных бумаг* (*securities market model*).

В качестве конкретного примера зафиксируем некоторое $T > 0$, установим $\mathbf{T} = [0, T]$ и вероятностное пространство (Ω, F, P), на котором определено стандартное (с нулевым дрейфом и единичной дисперсией) броуновское движение $\{W(t);\ 0 \le t \le T\}$. Пусть F_t будет σ-алгеброй, порождаемой $\{W(u);\ 0 \le u \le t\}$, и примем $F = F_T$. Определим $Z_0(t) \equiv 1$ и $Z_1(t, \omega) = \exp\{\sigma W(t, \omega) + \mu t\}$ для постоянных $\sigma > 0$ и μ. Такую модель назовем *моделью цен Блэка − Шоулса*, полагая, что соответственно Z_0 и Z_1 − процесс цены облигации и процесс цены акции. (Модель Блэка − Шоулса (1973) определяем, беря безрисковую процентную ставку равной нулю, но это отличие от обычной модели, как будет показано позже, является тривиальным.)

Какие сделки агент может заключать между потреблением в нулевой момент времени и в момент времени T, торгуя первичными ЦБ, цены которых задаются процессом Z? Чтобы ответить на этот вопрос, далее нужно определить в нашей модели торговые стратегии, которыми может пользоваться агент. Мы могли бы, например, позволять агентам торговать только в дискретные моменты времени, или только в непрерывном времени с некоторой нормой или допустить оба эти механизма. В этой главе предполагается, что агенты могут использовать только *простые торговые стратегии.* Формально говоря, простая стратегия – это $(K+1)$-мерный процесс $\theta = \{\theta(t);\ t \in \mathbf{T}\}$, который удовлетворяет трем условиям. Во-первых, $\theta(t)$ измерим относительно F_t для каждого $t \in \mathbf{T}$. Во-вторых, произведение $\theta_k(t)\, Z_k(t)$ является элементом пространства цен ФП X для каждого $t \in \mathbf{T}$ и $k = 0, 1,..., K$. В-третьих, существуют конечное целое число N и последовательность дат $0 = t_0 < \ldots < t_N = T$ такая, что $t_n \in \mathbf{T}$ и процесс $\theta(t, \omega)$ постоянен на интервале $t_{n-1} \le t < t_n$ для каждого состояния ω ($n = 1,..., N$).

Интерпретируем такой процесс θ как динамическое правило для владения $K + 1$ ЦБ с компонентами $\theta_k(t, \omega)$, представляющими (относительные) количества ЦБ k, которыми владеют во время t в состоянии ω.

Первое условие на θ состоит в том, что портфель, которым владеют во время t, может зависеть от состояния только через информацию, доступную в это время.

Второе условие является техническим по характеру и гарантирует, что количества различных ЦБ, купленных и проданных в торговые даты t_n, не изменяются так же хаотично, как функции ω. Это понадобится в последующем, чтобы вычислять некоторые условные математические ожидания.

Третье требование для простой стратегии говорит о том, что агент может торговать только в конечном числе дат (хотя это конечное число может быть сколь угодно большим) и что торговые даты должны быть определены заранее. Это дает довольно ограничительное представление способностей агентов в случае непрерывного времени, и мы не будем делать никакой попытки обосновать ограничение экономически. Но должна быть проявлена большая осторожность (см. § 6), если класс допустимых торговых стратегий в модели непрерывного времени предполагается широким.

Пусть θ будет простой стратегией с торговыми датами $t_0, t_1,\ldots, t_N$. Векторное произведение $\theta(t)Z(t)$ представляет собой стоимость портфеля в дату t (случайная переменная). Стоимость перед торговой датой t_n равна $\theta(t_{n-1})\, Z(t_n)$, и стоимость после торговой даты t_n станет $\theta(t_n)\, Z(t_n)$. Назовем θ *самофинансирующей* (*self-financing*) простой стратегией, если $\theta(t_{n-1})\, Z(t_n) = \theta(t_n)\, Z(t_n)$ для $n = 1,..., N$. Неявным в нашей терминологии является предположение о невязкой торговле. Самофинансирующие простые стратегии не получают и не производят финансирования между нулевой датой и T. Таким образом, они представляют собой способы, с помощью которых потребление может изменяться между нулевой датой и T.

Самофинансирующая простая стратегия θ будет называться *простым бесплатным ланчем* (*simple free lunch*), если при $\theta(0)\, Z(0) \le 0$ имеем $\theta(T)\, Z(T) \in X^+$. Такая ситуация, если она существует, аналогична тому, что имеется возможность делать *арбитражную прибыль* (*ar-*

bitrage profits). Это позволяет агенту увеличивать (или, по крайней мере, не уменьшать) потребление в нулевую дату, но увеличивать (с положительной вероятностью) потребление в дату T. Простые бесплатные ланчи, таким образом, не согласуются с экономическим равновесием для агентов из нашего класса **A**.

Иск (ФП) $x \in X$ считается *рыночным* (*marketed*) в нулевую дату, если существует самофинансирующая простая стратегия θ такая, что $\theta(T)Z(T) = x$ почти наверное. В этом случае мы говорим, что θ *порождает* (*generates*) x и что $\theta(0)\, Z(0)$ является (неявной) ценой x. Снова возможна непосредственная интерпретация. При расходах $\theta(0)Z(0)$ единиц потребления в нулевую дату, агент может купить портфель $\theta(0)$. Тогда в даты $t_1,\ldots, t_N$ он может без каких-либо расходов изменять его структуру в соответствии со стратегией θ. В момент времени T он владеет портфелем, который стоит $\theta(T, \omega)\, Z(T, \omega) = x\,(\omega)$ единиц потребления в дату T в состоянии ω.

Когда цены рыночных ФП вполне определены, мы должны гарантировать, что если две самофинансирующие простые стратегии θ и θ' порождают ФП x, то $\theta(0)\, Z(0) = \theta'(0)\, Z'(0)$. Это не обязательно верно вообще, но, очевидно, будет иметь место, если простые бесплатные ланчи не существуют. Предполагая, что это имеет место, будем считать M множеством рыночных ФП, и пусть отображение $\pi\, M \to R$ дает цены ФП $m \in M$. Если не имеется простых бесплатных ланчей, то π – линейный функционал на множестве M, которое является подпространством X. Для модели рынка ЦБ, которая не допускает простых бесплатных ланчей, назовем (M, π) системой цен, соответствующей модели. Мы говорим, что модель рынка рынка ЦБ *жизнеспособна* (*viable*), если она не допускает простых бесплатных ланчей и если соответствующая (M, π) жизнеспособна. При заданной жизнеспособной модели рынка ЦБ говорят, что цена ФП x определяется через арбитраж из модели и что арбитражная стоимость x равна p, если эти утверждения вытекают из соответствующей системы цен (M, π). Мы определяем $\widehat{M}$ и $\widehat{\pi}$ так же, как в § 2.

Для заданной модели рынка ЦБ мы хотели бы знать, является ли она жизнеспособной, и если так, идентифицировать $\widehat{M}$ и $\widehat{\pi}$. Поэтому, учитывая, что наша модель не допускает простых бесплатных ланчей, мы стремимся идентифицировать линейные функционалы $\psi \in \Psi$ такие, чтобы $\psi \mid M = \pi$ для соответствующей системы цен (M, π). Разработаем вероятностную характеризацию таких функционалов, которая позволяет изложить арбитражные вопросы в чисто вероятностных терминах. Как будет видно позже в нашем исследовании диффузионных моделей, для решения рассматриваемых задач может быть использован мощный и хорошо развитый раздел математической теории.

Эквивалентная мартингальная мера (*equivalent martingale measure*) является вероятностной мерой Q на (Ω, F), которая имеет следующие три свойства. Во-первых, P и Q эквивалентны в вероятностном смысле, когда $P(B) = 0$, если и только если $Q(B) = 0$ для $B \in F$. (Кратко, *множества нулевой меры* (*null sets*) P и Q совпадают.) Во-вторых, производная Радона – Никодима $\rho = dQ/dP$ удовлетворяет неравенству $E(\rho^2) < \infty$, или $\rho \in L^2(\Omega, F, P)$. Наконец, процесс Z является мартингалом по полям (*fields*) $\{F_t\}$ относительно Q. Обозначая через $E^*(.)$ оператор математического ожидания, связанного с Q, мы имеем $E^*(Z_k(u)|F_t) = Z_k(t)$ для всех $k = 0, 1,..., K$ и $u, t \in \mathbf{T}$ при $t < u$. Полезность этой несколько сложной для понимания концепции устанавливается следующим результатом.

Теорема 3.2. Предположим, что модель цены актива не допускает простых бесплатных ланчей. Тогда имеется взаимно однозначное соответствие между эквивалентными мартингальными мерами Q и линейными функционалами $\psi \in \Psi$ такими, что $\psi \mid M = \pi$. Это соответствие задается равенствами

$$Q(B) = \psi(1_B) \quad \text{и} \quad \psi(x) = E^*(x). \tag{3.6}$$

Если исходная модель цен допускает простые бесплатные ланчи, тогда не может существовать какой-либо эквивалентной мартингальной меры. (Это будет установлено как часть следствия 3.3.) В этих обстоятельствах π также не вполне определено. Таким образом, в предположении теоремы 3.2 в некотором смысле нет необходимости.

В доказательстве, которое приводится ниже, следует обратить внимание, что строгая положительность соответствует эквивалентности P и Q, непрерывность ψ соответствует $E(\rho^2) < \infty$ и свойство расширения $\psi \mid M = \pi$ – мартингальному свойству Q.

Доказательство. Напомним, что линейный функционал ψ на множестве X непрерывен, если и только если $\psi(x) = E(\rho x)$ для всякого $\rho \in L^2(\Omega, F, P)$. Это является содержанием теоремы представления Рица для пространств L^2.

Во-первых, пусть Q будет эквивалентной мартингальной мерой. Обозначим $\rho = dQ/dP$ и определим ψ через Q с помощью равенств (3.6). Поскольку $\rho \in L^2(\Omega, F, P)$, функцуионал ψ непрерывен. Так как P и Q эквивалентны, ρ строго положительна. Таким образом, ψ строго положителен, и мы имеем $\psi \in \Psi$. Остается показать, что $\psi \mid M = \pi$. Возьмем $m \in M$, и пусть θ будет простой стратегией самофинансирования, которая порождает m. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ будут датами, в которые может изменяться стоимость θ. Тогда для $1 \le n \le N$

$$E^*(\theta(t_n)\, Z(t_n) | F_{t_{n-1}}) = E^*(\theta(t_{n-1})\, Z(t_n) | F_{t_{n-1}}) =$$

$$= \theta(t_{n-1})\, E^*(Z(t_n) | F_{t_{n-1}}) = \theta(t_{n-1})\, Z(t_{n-1})$$

первое равенство имеет место, поскольку θ является самофинансирующей, а последнее равенство справедливо, так как Z – мартингал относительно Q. Повторение этой операции для $n = 1, 2, \ldots, N$ дает равенство

$$E^*(\theta(T)\, Z(T)) = \theta(0)\, Z(0),$$

которое в связи с тем, что $m = \theta(T)Z(T)$ и $\pi(m) = \theta(0)Z(0)$, превращается в равенства $E^*(m) = \psi(m) = \pi(m)$.

Обратно, пусть $\psi \in \Psi$ будет таким, что $\psi \mid M = \pi$. Определим Q через ψ с помощью условия (3.1). Если $P(B) = 0$, тогда $\mathbf{1}_B$ идентифицируется как 0 в X, так что вероятность $Q(B) = \psi(\mathbf{1}_B) = 0$. Если $P(B) > 0$, тогда $\mathbf{1}_B \in X^+$ и $0 < \psi(\mathbf{1}_B) = P^*(B)$. Таким образом, P и Q эквивалентны. Так как ψ непрерывен, $\psi(x) = E(\rho\, x)$ для всякого $\rho \in L^2(\Omega, F, P)$. Таким образом, $Q(B) = E(\rho \mathbf{1}_B)$ и мера Q является σ-аддитивной мерой, а $dQ/dP = \rho$ квадратично интегрируемой функцией. Поскольку $\mathbf{1}_\Omega \in M$ и $\psi(\mathbf{1}_\Omega) = 1$, то из этого следует условие нормировки $Q(\Omega) = 1$ и, следовательно, Q – вероятностная мера. Остается показать, что процесс $\{Z_k(t), F_t;\, t \in \mathbf{T}\}$ является мартингалом по мере Q для каждого k. Когда $k = 0$, это очевидно. Зафиксируем $k > 0$, t и $u \in \mathbf{T}$ такие, чтобы $t \le u$, и $B \in F_t$. Рассмотрим простую самофинансирующую торговую стратегию θ, определенную равенствами

$$\theta_k(s,\omega) = \begin{cases} 1 & \text{для } s \in [t,u) \text{ и } \omega \in B, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

$$\theta_0(s,\omega)=\begin{cases}-Z_k(t,\omega) & \text{для } s\in[t,u) \text{ и } \omega\in B,\\ Z_k(u,\omega)-Z_k(t,\omega) & \text{для } s\in[u,T) \text{ и } \omega\in B,\\ 0 & \text{в других случаях.}\end{cases}$$

$$\theta_j(s,\omega)=0 \quad \text{для всех } j\neq 0,k.$$

Стратегия выглядит более сложной, чем на самом деле, и представляет стратегию покупки одной акции k в момент времени t при событии B и продажи ее в момент времени u, используя нулевой актив без расходов на сделки (включая первоначальную покупку, если $t = 0$). Эта торговая стратегия дает в дату T портфель стоимостью

$$\theta(T)\,Z(T) = [Z_k(u) - Z_k(t)] \times \mathbf{1}_B,$$

так что ФП является рыночной и имеет нулевую цену. Из $\psi \mid M = \pi$ следует, что $\psi([Z_k(u) - Z_k(t)] \times \mathbf{1}_B) = 0$. В терминах математического ожидания $E^*(.)$ это означает, что

$$E^*([Z_k(u) - Z_k(t)] \times \mathbf{1}_B) = 0 \ \text{ или } \ E^*(Z_k(u) \times \mathbf{1}_B) = E^*(Z_k(t) \times \mathbf{1}_B),$$

и справедливо для всех $B \in F_t$. Таким образом, $Z_k(t)$ является вариантом $E^*(Z_k(u) | F_t)$, что завершает доказательство.

Из такого соответствия и из наших предыдущих результатов, получим следующее утверждение – отправную точку для анализа в примерах.

Следствие 3.3 а) Модель рынка ЦБ жизнеспособна, если и только если существует по крайней мере одна эквивалентная мартингальная мера. б) Предположим, что модель рынка ЦБ является жизнеспособной. Пусть **P** обозначает (непустое) множество эквивалентных мартингальных мер. Тогда $x \in \widehat{M}$, если и только если $E^*(x)$ постоянное по всем $Q \in$ **P**, и этой константой является $\hat{\pi}(x)$. в) Модель рынка ЦБ жизнеспособна и цена каждой ФП $x \in X$ определяется арбитражным способом, если и только если существует единственная эквивалентная мартингальная мера.

Доказательство. В пункте а) нам нужно показать, что если существует эквивалентная мартингальная мера Q, тогда не существует никакого простого бесплатного ланча. Предположим, что θ – самофинансирующая стратегия с $\theta(T)Z(T) \in X^+$. Так как Q эквивалентна по отношению к P, то $Q(\theta(T)Z(T) \geq 0) = 1$ и $Q(\theta(T)Z(T) > 0) > 0$. Таким образом, $E^*[\theta(T)Z(T)] > 0$. Рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 3.2, дают равенство $\theta(0)Z(0) = E^*[\theta(T)Z(T)]$. Значит, $\theta(0)Z(0) > 0$, если $\theta(T)Z(T) \in X^+$, и не существует никакого простого бесплатного ланча. Отсюда а) и б) прямо следуют из предыдущих результатов, а в) – прямое следствие а) и б).

§ 4. КОНЕЧНАЯ МОДЕЛЬ

Чтобы проиллюстрировать наши результаты, сначала рассмотрим модели, в которых как Ω, так и $\mathbf{T}$ являются конечными. В таких моделях пространство X состоит из *всех* F-измеримых функций $\Omega \to R$. Модель жизнеспособна, если и только если не существует простых бесплатных ланчей, и цена ФП определяется с помощью арбитража, если и только если он является рыночным. (Доказательства этих утверждений достаточно простые и здесь не приводятся.)

Рассмотрим числовой пример, приведенный в табл. 3.1. Имеется девять состояний среды, обозначаемых $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_9$, и датами торговли являются $\mathbf{T} = \{0, 1, 2\}$. Примем, что F_1 является полем, порожденным разбиением пространства Ω на три ячейки $B_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $B_2 = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ и $B_3 = \{\omega_7, \omega_8, \omega_9\}$, а $F_2 = F$ – полем, порожденным полным разбиением пространства Ω. Другими словами, инвесторы знают в момент времени $t = 1$, какое из событий B_j произошло, и они знают в момент времени $t = 2$ состояние среды. Имеются три ЦБ. Конечно, $Z_0(t) \equiv 1$. Цены $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ даются в табл. 3.1 парой чисел так, что $Z_1(t)$ является верхним числом и $Z_2(t)$ располагается под ним. Таким образом, $Z_1(0, \omega_1) = 10$, $Z_1(1, \omega_1) = 11$ и $Z_1(2, \omega_1) = 14$. Мы не будем конкретизировать исходную вероятностную меру P на Ω полностью, приняв только, что $P(\omega_i) > 0$ для всех i. (Конкретизация вероятностей не важна для наших целей.)

Нам требуется узнать, жизнеспособна ли эта модель, и, если так, цены каких ФП определяются через арбитраж. Для конкретности определим ФП равенством

$$x = \{2\,Z_1(2) + Z_2(2) - [14 + 2 \min_{0 \leq t \leq 2} \min\,(Z_1(t), Z_2(t))]\}^+.$$

Эта ФП предоставляет право покупать в дату исполнения $t = 2$, две акции типа 1 плюс одна акция типа 2 по цене 14 плюс удвоенная самая низкая цена, достигнутая любой из рисковых ЦБ в любую из трех торговых дат. В табл. 3.1 стоимость ФП $x(\omega_i)$ показана для каждого состояния среды ω_i. Мы выбрали этот довольно элементарный пример, чтобы подчеркнуть, что стоимость ФП может зависеть от всей истории цен лежащих в основе ЦБ. Заметим, например, что цены ФП в состояниях ω_2 и ω_5 в дату исполнения одинаковы, но x дает различные выплаты в этих двух состояниях.

Таблица 3.1

Конечный пример

Даты торговли	Динамика изменения цен и состояний									
0	Цены активов	10 10								
1	Вероятность перехода	$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$		
	Цены активов	11 9			11 10			8 11		
2	Вероятность перехода	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
	Цены активов	14 9	10 13	10 8	14 9	10 13	10 9	12 10	7 15	7 10
Состояние		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9
$x(\omega_i)$		5	1	0	5	0	0	4	1	0
$P^*(\omega_i)$		$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$

Теперь определим множество **P** всех эквивалентных мартингальных мер. Во-первых, если $Q \in \mathbf{P}$, тогда $E^*[Z_1(1)] = 10$ и $E^*[Z_2(1)] = 10$. Если принять обозначения p для вероятности $Q(B_1)$ и q для вероятности $Q(B_2)$, тогда получим, что

$$11p + 11q + 8(1 - p - q) = 10 \quad \text{и} \quad 9p + 10q + 11(1 - p - q) = 10,$$

что дает значения $p = q = 1/3$. Эти значения выписаны в табл. 3.1 в соответствующих ячейках.

Далее нужно, чтобы $E^*[Z_1(2) \mid B_1] = 11$ и $E^*[Z_2(2) \mid B_1] = 9$. Производя вычисления так же, как это делалось выше, находим следующие численные значения для вероятностей $Q(\omega_1 \mid B_1) = 1/4$, $Q(\omega_2 \mid B_1) = 3/20$ и $Q(\omega_3 \mid B_1) = 3/5$. Условные вероятности записаны в соответствующих строках табл. 3.1 вместе с соответствующими условными вероятностями различных финальных состояний при фикированных состояниях B_2 и B_3, которые вычисляются аналогично. Так как каждая из этих разветвленных вероятностей единственная, то имеется и единственная эквивалентная мартингальная мера Q, которая записана в последнем столбце табл. 3.1. Это влечет жизнеспособность модели, при которой цены всех ФП определяются через арбитраж, и, в частности, арбитражная цена x равна

$$\widehat{\pi}(x) = E^*(x) = \sum_{i=1}^{9} x(\omega_i)Q(\omega_i) = 1{,}2333.$$

Наш пример иллюстрирует общие принципы для конечных моделей. Предположим, что в каждую торговую дату t имеется не более чем $K + 1$ векторов цен, которые могут давать результат в следующую торговую дату при информации, доступной к моменту времени t. Если модель жизнеспособна, тогда цены всех ФП определяются через арбитраж (за исключением некоторых вырожденных случаев) и их арбитражные стоимости можно вычислить с помощью простой рекуррентной процедуры. Этот факт легко доказать непосредственно с помощью известных рассуждений.

§ 5. СЛУЧАЙ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим частный случай, когда $\mathbf{T} = [0, T]$ и Z – векторный диффузионный процесс. Для компактности обозначений сначала зададим K-мерный диффузионный процесс $Y = \{Y(t);\ 0 \le t \le T\}$, а затем сконструируем процесс цен Z, используя обозначения $Z_k(t) = Y_k(t)$ для $k = 1,\dots, K$ и $Z_0(t) \equiv 1$.

Примем, что на исходном базовом вероятностном пространстве (Ω, F, P) уже определено K-мерное стандартное броуновское движение $W = \{W(t);\ 0 \le t \le T\}$. Процессы составляющих $W_1(t),\dots, W_K(t)$ являются независимыми одномерными броуновскими движениями с нулевым дрейфом и единичной дисперсией и $W_k(0) = 0$, $k = 1,\dots, K$. Обозначим $F_t = F\{W(s);\ 0 \le s \le t\}$ для $0 \le t \le T$. Напомним, что мы приняли $F = F_T$. Пусть

$$\sigma(x, t)\colon R^K \times [0, T] \to R^{K\times K},\ \ \mu(x, t)\colon R^K \times [0, T] \to R^K$$

будут заданными функциями, непрерывными по x и t. Мы предполагаем, что $(K \times K)$-матрица $\sigma(x, t)$ невырожденная для каждого x и t, так что имеется единственная функция $\alpha(x, t)$, удовлетворяющая равенству

$$\sigma(x, t)\alpha(x, t) + \mu(x, t) = 0 \text{ для } x \in R^K, ,t \in [0, T].$$

Здесь $\alpha(x, t)$ и $\mu(x, t)$ следует считать вектор-столбцами. Пусть Y будет процессом, адаптированным к $\{F_t\}$ и удовлетворяющим стохастическому интегральному уравнению Ито

$$Y_k(t) = Y_k(0) + \sum_{j=1}^{K} \int_0^t \sigma_{kj}(Y(s), s) dW_j(s) + \int_0^t \mu_k(Y(s), s) ds \qquad (3.7)$$

для $k = 1,..., K$ и $0 \le t \le T$, где $Y(0)$ – постоянный K-вектор. (Сведения об основных определениях, касающихся интегралов Ито и стохастических интегральных уравнений, содержатся в книге И. Гихмана и А. Скорохода, 1972).

Обычным способом мы выражаем равенство (3.7) более компактно как

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \sigma(Y(s), s) dW(s) + \int_0^t \mu(Y(s), s) ds.$$

Теперь определим процесс цен Z через Y, как объяснялось выше. Наконец, предположим существование *единственного* непрерывного K-мерного процесса $Y^* = \{Y^*(t);\ 0 \le t \le T\}$, который (с точностью до эквивалентности) удовлетворяет интегральному соотношению

$$Y^*(t) = Y(0) + \int_0^t \sigma(Y^*(s), s) dW, \quad 0 \le t \le T. \qquad (3.8)$$

Это требует кроме простой непрерывности и некоторой регулярности для функции $\sigma(x, t)$ (см. И. Гихман, А. Скороход (1972), где установлены достаточные условия). Определим $(K + 1)$-мерный процесс Z^*, полагая $Z_k^*(t) = Y_k^*(t)$ для $k = 1,\dots, K$ и $Z_0^*(t) \equiv 1$. Прежде чем представить основной результат главы, сформулируем предварительное утверждение, которое очень важно для последующих интерпретаций. Для этого утверждения пусть $C[0, T]$ будет пространством непрерывных функций $[0, T] \to R^K$, обеспечивающих топологию однородной сходимости. Когда мы говорим что $f : C[0, T] \to R$ является измеримым функционалом, то подразумеваем измеримость по борелевскому σ-полю из $C[0, T]$.

Утверждение 3.1. Для $0 \le t \le T$, борелевское σ-поле F_t порождается процессом $\{Z(s);\ 0 \le s \le t\}$. Поэтому цена каждой ФП x имеет вид $x = f(Z)$, где $f(.)$ – некоторый измеримый функционал $f: C[0, T] \to R$.

Доказательство. Оно будет дано позже в этом параграфе.

Утверждение 3.1 показывает, что если разрешить инвесторам формировать портфели, основанные на информационной структуре $\{F_t\}$, они будут получать доступ *только* к прошлой и настоящей информации о ценах в каждый момент времени t. Вместе с тем цена каждой ФП может быть выражена как функция цен, заданных на интервале $[0, T]$, если $F = F_T$.

Основной результат главы следующий. Для вектора-столбца γ мы примем обозначение $\gamma^2 = \gamma_1^2 + \ldots + \gamma_K^2$.

Теорема 3.3. Множество **P** эквивалентных мартингальных мер является непустым, если и только если:

а) $\int\limits_0^T \alpha^2(Y(t),t)dt < \infty$ почти наверное;

б) $E(\rho^2) < \infty$, где $\rho = \exp\left(\int\limits_0^T \alpha(Y(t),t)dW(t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^T \alpha^2(Y(t),t)dt \right)$;

в) Y^* – мартингал на $\{F_t\}$.

В таком случае имеется единственная $Q \in \mathbf{P}$, ее производной Радона – Никодима является $dP^*/dP = \rho$ и распределение Z на (Ω, F, P^*) совпадает с распределением Z^* на (Ω, F, P).

Хорошо известным достаточным условием для пункта в) является неравенство

$$\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} E\left[\int\limits_0^T \{\sigma_{ij}(Y^*(t),t)\}^2 dt \right] < \infty.$$

Следствие 3.4. Модель финансового рынка ЦБ жизнеспособна, если и только если выполняются условия а) – в). В этом случае цена каждой ФП $x \in X$ определяется арбитражным путем с арбитражной ценой $\hat{\pi}(x) = E[f(Z^*)] = E^*[f(Z)]$, где $x = f(Z)$, как и в утверждении 3.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о у т в е р ж д е н и я 3.1. Для справедливости первого предложения мы должны показать, что F_t равна σ-полю G_t, порождаемому процессом $\{Y(s);\ 0 \le s \le t\}$. Пусть

$$V(t) = Y(t) - Y(0) - \int_0^t \mu(Y(s), s)ds = \int_0^t \sigma(Y(s), s)dW(s)$$

для $0 \le t \le T$. Заметим, что V адаптирован к $\{G_t\}$. Зафиксируем $t > 0$ и определим для целых N

$$W_N(t) = \sum_{n=0}^{2^N-1} \{\sigma(Y(t_n), t_n)\}^{-1} \times [V(t_{n+1}) - V(t_n)]$$

где $t_n = nt / 2^N$. (Напомним, что σ предполагается невырожденной.) Очевидно, что $W_N(t)$ является G_t-измеримым. Используя непрерывность μ и σ, легко показать, что $W_N(t) \to W(t)$ почти всюду при $N \to \infty$, так что $W(t)$ будет G_t-измеримым. Таким образом, $F_t \subseteq G_t$. Вначале было принято, что Y адаптировано к $\{F_t\}$, так что $G_t \subseteq F_t$, и первое предложение доказано. Второе предложение (касающееся измеримости) стандартное и не будет доказываться.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3.3. Через Φ обозначим множество K-мерных процессов $\phi = \{\phi(t);\ 0 \le t \le T\}$ таких, что $\phi_k(t, \omega)$ совместно измерим в t и ω для каждой составляющей $k = 1,..., K$, процесс φ адаптирован к броуновским полям $\{F_t\}$, и $\int_0^T \phi^2(t)dt < \infty$ почти наверное. Элементы φ будут называться *неупреждающими функциями* (*non-anticipating functions*). Стохастический интеграл $\int \phi(s)\, dB(s)$ определяется для интегрируемого $\phi \in \Phi$. Пусть Q будет эквивалентной мартингальной мерой с $dQ = \zeta dP$. Поэтому случайная величина ζ строго положительна и квадратично интегрируема по определению, а процесс $\{\zeta(t);\ 0 \le t \le T\}$, определяемый равенством $\zeta(t) = E(\zeta \mid F_t)$, является строго положительным мартингалом по броуновским полям $\{F_t\}$, с $\zeta(T) = \zeta$ и $E(\zeta(t)) = E(\zeta) = 1$ для всех t. Кроме того, используя неравенство Иенсена, легко показать, что $\zeta(t)$ квадратично интегрируем для каждого t. Поэтому любой такой мартингал может быть представлен в виде

$$\zeta(t) = 1 + \int_0^t \gamma(s)dW(s), \quad 0 \le t \le T, \tag{3.9}$$

где $\gamma \in \Phi$ также удовлетворяет неравенству $\int_0^T E(\gamma^2(t))dt < \infty$. Заметим, что согласно представлению (3.9) $\zeta(.)$ почти наверное непрерывен, и из этого следует, что выборочная траектория $\zeta(., \omega)$ процесса отделена от нуля для почти всякого ω. Определим K-мерную непредсказуемую функцию равенством $\phi_k(t) = \gamma_k(t)/\zeta(t)$ для $k = 1,\ldots, K$. Тогда из леммы Ито и (3.9) следует, что

$$\ln(\zeta(t)) = \int_0^t \phi(s)\,dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \phi^2(s)ds,\ 0 \le t \le T.$$

В частности, имеем

$$\zeta = \exp\left\{\int_0^T \phi(s)\,dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \phi^2(s)\,ds\right\}. \tag{3.10}$$

При преобразованиях мы не использовали тот факт, что Q является (в соответствии с предположением) эквивалентной мартингальной мерой. Это позволяет показать, что любая строго положительная и квадратично интегрируемая случайная величина ζ может быть представлена в форме (3.10).

Получив такое представление для производной Радона – Никодима ζ, можно использовать мощную теорему Гирсанова (1960), чтобы показать, что непредсказуемая функция $\phi(t)$ в представлении (3.10) фактически должна иметь структуру $\alpha(Y(t), t)$. Пусть

$$W^*(t) = W(t) - \int_0^t \phi(s)\,ds,\ 0 \le t \le T.$$

По теореме Гирсанова процесс W^* является K-мерным стандартным броуновским движением на (Ω, F, Q), где $dQ = \zeta dP$, а процесс Y удовлетворяет на (Ω, F, Q) стохастическому дифференциальному уравнению

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \sigma(Y(s),s)dW^*(s) + \int_0^t \mu^*(s)ds, \tag{3.11}$$

где $\mu^*(t) = \mu(Y(t), t) + \sigma(Y(t), t)\,\phi(t)$.

Предположим пока, что $\sigma(x, t)$ – ограниченная функция. Тогда стохастический интеграл в правой части равенства (3.11) – мартингал на (Ω, F, Q). Так как по предположению Y является мартингалом на (Ω, F, Q), абсолютно непрерывная составляющая $\int \mu^*(s)\, ds$ также должна быть мартингалом, и это верно, если и только если $\mu^*(t) \equiv 0$ для почти каждого t.

Целесообразно заметить, что в этих рассуждениях мы используем предположение о том, что Q является эквивалентной *мартингальной* мерой. В случае общей σ того же заключения можно достичь, используя останавливающиеся процессы и тот факт, что элементы σ (.,.) ограничены на ограниченных множествах. Пусть $b > 0$ будет достаточно большим и пусть τ будет первым моментом времени t таким, что $Y_k(t) = \pm\, b$ для некоторого k, с $\tau = T$, если никакое такое t не существует. Если Y – мартингал на (Ω, F, Q), то остановленный процесс $Y(t \wedge \tau)$ – тоже мартингал, и из этого можно заключить, что $\mu^*(t) \equiv 0$ для $0 \le t \le \tau$. Но $\tau \to T$ почти наверное, когда $b \to \infty$, так что из этого следует, что $\mu^*(t) \equiv 0$ для всех t. Детали этих рассуждений могут быть достаточно просто восстановлены. Наконец, заметим, что $\mu^*(t) = 0$, если и только если $\phi(t) = \alpha(Y(t), t)$ почти всюду.

Таким образом, мы установили, что ζ может быть производной Радона – Никодима эквивалентной мартингальной меры Q, если только ζ удовлетворяет представлению (3.10) с $\phi(t) = \alpha(Y(t), t)$ для всех t, что эквивалентно требованию $\zeta = \rho$. Таким образом, **P** непустое, если только ρ хорошо определена и квадратично интегрируема. Это означает, что условия а) и б) теоремы 3.3 *необходимы* для того, чтобы **P** было непустым.

Предположим теперь, что условия а) и б) имеют место. Хорошо известно, что это влечет $E(\rho) = 1$ (см. И. Гихман, А. Скороход, 1972), так что ρ действительно является производной Радона – Никодима. При $dQ = \rho dP$ рассуждаем точно также, чтобы установить, что на вероятностном пространстве (Ω, F, Q)

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \sigma(Y(s), s)\, dW^*(s), \quad 0 \le t \le T. \tag{3.12}$$

Так как по предположению Y^* – единственное решение уравнения (3.8) на (Ω, F, P), мы заключаем, что Y – единственное решение уравнения (3.12) на (Ω, F, Q) и что его распределение совпадает с распределением Y^* на (Ω, F, P). Таким образом, при заданных а) и б) необходимым и достаточным условием для того, чтобы Q была эквивалентной мартингальной мерой, является в). Это заключает доказательство теоремы 3.3. Следствие 3.4 вытекает из теоремы 3.2 и ее следствия.

И. Гирсанов (1960) использует коэффициент диффузии в более широком смысле, чем обычно, позволяя функциям параметров σ и μ зависеть как от прошлых, так и от настоящих значений векторного процесса Y. Теорема 3.3 может быть достаточно легко распространена на этот более широкий класс процессов, но тогда, чтобы строго сформулировать результат, понадобится вводить весьма много обозначений из теории меры для уточнения смысла значений параметров, зависящих от всего процесса Y непредсказуемым образом. Кроме того, труднее установить требования непрерывности для σ, но доказательство почти не нуждается в каком-либо изменении.

§ 6. ДРУГИЕ ТОРГОВЫЕ СТРАТЕГИИ

Здесь мы не приводим экономическое обоснование и поэтому ограничиваемся простыми торговыми стратегиями, но можем дать некоторые комментарии относительно того, какие последствия можно ожидать, если ослабить это ограничение. Когда допускается более широкий класс торговых стратегий, необходимо сформулировать определение стратегии самофинансирования в рамках этого более широкого класса. При таком допущении анализ в § 3 до введения эквивалентных мартингальных мер вообще бы не изменился. Поинтересуемся, существуют ли бесплатные ланчи и, если нет, определим множество рыночных ФП (обозначаемое через M') и ассоциированные с ними функционалы цен (обозначаемые π'). Модель рынка ЦБ жизнеспособна, если и только если существует некоторый функционал $\psi \in \Psi$ такой, что $\psi \mid M' = \pi'$, и принятая модель является жизнеспособной. Цена ФП x определяется арбитражем, если и только если функционал $\psi(x)$ постоянен на множестве $\{\psi \in \Psi\colon \psi \mid M' = \pi'\}$. Однако больше не может выполняться взаимно однозначное соответствие между этим множеством функционалов ψ и эквивалентными мартингальными мерами. Принимая отсутствие бесплатных ланчей при более широком классе допустимых торговых стратегий, имеем $M \subseteq M'$ и $\pi' \mid M' = \pi$. Поэтому любой функционал $\psi \in \Psi$ такой, что $\psi \mid M' = \pi'$, удовлетворяет $\psi \mid M = \pi$ и дает эквивалентную мартингальную меру (посредством обычного соответствия). Но может оказаться, что эквивалентная мартингальная мера приводит к $\psi \in \Psi$ такому, что $\psi \mid M' \neq \pi'$. Таким образом, цена ФП может быть определена с помощью арбитража, если эта ФП имеет постоянное математическое ожидание при всех эквивалентных мартингальных мерах, и ее арбитражная стоимость будет этой константой, но обратное не обязательно будет справедливым. Конечно, если выполняется условие

$$\psi \mid M' = \pi' \text{ для всех } \psi \in \Psi \text{ таких, что } \psi \mid M = \pi, \qquad (3.13)$$

тогда обратное имеет место. Условие (3.13) означает, что взаимно однозначное соответствие между эквивалентными мартингальными мерами и $\{\psi \in \Psi\colon \psi \mid M' = \pi'\}$ (нерегулярно) выполняется.

Рассмотрим, например, модель Блэка – Шоулса. Расширим множество допустимых торговых стратегий, позволяя моментам времени t_1, t_2, ..., t_{N-1} быть моментами остановки относительно $\{F_t\}$. Можно показать, что это расширение не вызывает появления бесплатных ланчей и что условие (3.13) выполняется. Таким образом, с расширенным классом торговых стратегий модель Блэка – Шоулса жизнеспособна и цены всех ФП определяются с помощью арбитража.

Чтобы увидеть, как понятия могут перепутываться, когда множество допустимых стратегий торговли расширяется, снова рассмотрим модель Блэка – Шоулса, и теперь предположим, что общее количество сделок N допускается устанавливать зависимым (случайным). С формальной точки зрения имеются неслучайные моменты времени $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N \le T$ и целочисленная случайная величина N такая, что $\theta(.)$ изменяет значения только в моменты времени t_1, t_2,..., t_N. Чтобы торговые стратегии не предваряли будущее, мы добавим требование, чтобы $\{N \ge n\} \in F_{t_n}$ для всех n. Назовем такие торговые стратегии *почти простыми*. Затем определим почти простые стратегии самофинансирования и почти простые бесплатные ланчи очевидным способом. Кульминационный момент состоит в том, что почти простые бесплатные ланчи существуют. Фактически существуют почти простые самофинансирующие торговые стратегии θ такие, что почти наверное

$$\theta(0)\, Z(0) = 0 \text{ и } \theta(T)\, Z(T) \ge 1. \qquad (3.14)$$

Значит, что если агенты могут использовать почти простые торговые стратегии, модель Блэка – Шоулса оказывается бессмысленной моделью экономического равновесия. Стоит отметить, что это не обусловлено каким-то особенным свойством броуновского движения. То же утверждение справедливо для модели скачкообразных процессов, рассмотренных в гл. 2.

Стратегия торговли, для которой выполняются соотношения (3.14), не очень сложная. Она равносильна известной стратегии дублирования, в соответствии с которой надеются победить в рулетке: ставь на красный цвет и продолжай удваивать свои ставки, пока не появится красный. Чтобы реализовать эту стратегию, нужно иметь возможность делать ставки счетное число раз, в то время как в любом конкретном состоянии имеется возможность делать только конечное число ставок. Если возьмем $t_n = T - T/2^N$, это даст нам возможность делать счетное число ставок. Чтобы реализовать такую стратегию, нужно иметь возможность придерживаться дублирования. Необходимо только иметь конечную сумму в любом конкретном состоянии ω, но эта сумма не может быть ограниченной по ω. В модели Блэка – Шоулса рынка без затрат на сделки короткие продажи облигаций дают необходимые фонды.

В статьях Блэка – Шоулса (1973) и Мертона (1973) (см. гл. 2) по определению цен опционов для диффузионных моделей инвесторам разрешается торговать непрерывно. Эта непрерывная торговля смоделирована с помощью интегралов Ито. Для всякого $\theta(t)$ – портфеля инвестора в момент времени t там принимается, что $\theta(t)$ является гладкой функцией t и вектора текущих цен финансовых активов $Z(t)$. Так как Z – процесс Ито, то же верно и для $\theta(t)$, и из этого следует, что типичная торговая стратегия $\theta(t)$ имеет неограниченную вариацию на каждом конечном интервале. Пользуясь такой стратегией, агент не только может выполнять бесконечное число сделок (или торгует непрерывно), но также и покупать и продавать неограниченные количества акций и облигаций в каждом временном интервале. Если процесс стоимости портфеля имеет вид $V(t) = \theta(t)Z(t)$, как и прежде, то определение интеграла Ито предполагает, что самофинансирующие торговые стратегии следует находить в соответствии с ограничением

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \theta(u)\,dZ(u), \quad 0 \le t \le T.$$

Это ограничение неявно содержится в первоначальном исследовании Блэка и Шоулса (1973) и явно демонстрируется в статье Мертона (1977). Существуют ли бесплатные ланчи при таком определении?

Если нет, является ли модель рынка ЦБ жизнеспособной для некоторого разумного класса агентов?

§ 7. ОБОБЩЕНИЯ

Рассмотрим обобщения модели, проанализированной в § 2–5. Строгие исследования не приводятся из-за отсутствия места, которое потребовалось бы для этого. В необходимых случаях даются соответствующие ссылки на литературные источники, в которых имеются строгие доказательства используемых здесь утверждений.

До сих пор предполагалось, что одна из исходных ЦБ является безрисковой и имеет нулевую процентную ставку. Это может показаться ограничительным предположением, но на самом деле не так.

Предположим, что одна из ЦБ всегда имеет строго положительную цену, и если такое нежесткое предположение выполняется, можно использовать цену этой ЦБ как единицу измерения. Естественно, что в модели рынка ЦБ с такой нормировкой цен ЦБ, используемая как единица измерения, является безрисковой и имеет нулевую процентную ставку.

Формальная постановка при таком подходе выглядит следующим образом. Зафиксируем модель рынка ЦБ, в которой нет безрисковых активов с нулевой процентной ставкой, но в которой один из $K + 1$ активов, скажем актив 0, имеет цену $Z_0(t, \omega) > 0$ для всех t и ω. Теперь сконструируем новую модель рынка ценных бумаг с тем же самым вероятностным пространством (Ω, F, P), торговыми датами $\mathbf{T}$, информационной структурой $\{F_t\}$, но с процессом цен $\{Z'_t\}$, определяемым соотношением

$$Z'_k(t, \omega) = Z_k(t, \omega)/Z_0(t, \omega).$$

Очевидно, что $Z'_0(t, \omega) \equiv 1$. Нестрого говоря, исходная модель является жизнеспособной, если и только если штрихованная модель существует, и цена ФП x в исходной модели определяется арбитражем, если и только если ФП $x' = x/Z_0(T)$ определяется арбитражем в штрихованной модели. Более того, если цены x и x' определяются через арбитраж в своих соответствующих моделях, их арбитражные стоимости связаны соотношением $\hat{\pi}'(x') = \hat{\pi}(x)/Z_0(0)$. Это так, нестрого говоря, потому что θ является простой самофинансирующей торговой стратегией в исходной модели, если и только если она простая самофинансирующая в штрихованной модели. Чтобы увидеть это, заметим, что если θ определена на торговых датах $t_0, t_1, \ldots, t_N$, тогда

$$\theta(t_{n-1})\, Z(t_n) = \theta(t_n)\, Z(t_n), \text{ если и только если } \theta(t_{n-1})\, Z'(t_n) = \theta(t_n)\, Z'(t_n).$$

Таким образом, ФП $m \in M$, если и только если ФП $m' = m / Z_0(T) \in M'$ и $\pi'(m') = \pi(m)/Z_0(0)$.

Чтобы сделать это соответствие точным, необходимо принять некоторую строгость. Переход от исходной модели к штрихованной предполагает изменение только в единицах. Таким образом, этот переход должен быть экономически нейтральным. Переход не должен изменять ни пространство финансовых производных, ни топологии, в которой предпочтения агентов предполагаются непрерывными. В таком случае $x \in X$, если и только если $x' \in X'$, и $x_n \to x$ в X, если и только если $x'_n \to x'$ в X'. Если $Z_0(T)$ не ограничено сверху и отделено от нуля, значит, мы не можем взять $X' = L^2(\Omega, F, P)$ и топология на X' будет топологией, порожденной L^2-нормой.

Точнее

$$x' \in X', \text{ если } E([x' Z_0(T)]^2) < \infty,$$

и

$$x'_n \to x', \text{ если } E([(x'_n - x)\, Z_0(T)]^2) \to 0.$$

Таким образом, чтобы быть эквивалентной мартингальной мерой в штрихованной модели, Q должна удовлетворять неравенству $E([(dQ/dP)\, Z_0(T)]^2) < \infty$, а не $E([dQ/dP]^2) < \infty$. Конечно, когда $Z_0(T)$ лежит в ограниченном подинтервале $(0, \infty)$, это усложнение можно проигнорировать: X' является $L^2(\Omega, F, P)$, топология на X' является топологией, порожденной L^2-нормой и, таким образом, $dQ/dP \in L^2$ будет собственным требованием непрерывности для эквивалентной мартингальной меры.

Чтобы показать применение этого, рассмотрим модель фактически совпадающей с моделью Блэка – Шоулса (1973). Имеются два актива, облигация с процентной ставкой r такая, что $Z_0(t) = \exp(rt)$, и акция, динамика цены которой задается уравнением

$$dZ_1(t) = \mu\, Z_1(t)dt + \sigma\, Z_1(t)dW(t),$$

где μ и σ – константы.

Поля $\{F_t\}$ также порождаются броуновским движением W. Переходя к штрихованной модели, получим $Z'_0(t, \omega) \equiv 1$ и $Z'_1(t) = \exp(-rt)$. Таким образом,

$$dZ'_1(t) = (\mu - r)\, Z'_1(t)dt + \sigma Z'_1(t)\, dW(t).$$

Применяя результаты, полученные в § 5, мы знаем, что эта модель является жизнеспособной и что цены всех ФП определяются арбитражем. Для того чтобы найти арбитражную стоимость конкретной ФП, например, такой, как $x = [Z_1(t) - a]^+$, перейдем к штрихованной модели, в которой $x' = (Z'_1(T)\exp(rT) - a)^+/\exp(rT)$. Тогда

$$\widehat{\pi}'(x') = E\,[e^{-rt}(Z_1{*}(T)e^{rt} - a)^+],$$

где $dZ_1{*}(t) = Z_1{*}(t)dW(t)$.

Полагая $dZ_1^0 = rZ_1^0(t)dt + \sigma Z_1^0(t)\, dW(t)$, получаем формулу

$$\widehat{\pi}(x) = \widehat{\pi}'(x')/Z_0(0) = \widehat{\pi}'(x') = E[e^{-rt}(Z_1^0(T) - a)^+],$$

которая полностью совпадает с формулой Блэка – Шоулса. Можно применить это преобразование к модели Мертона (1973) со стохастической процентной ставкой. В таком случае никаких проблем при переходе к штрихованной модели не появляется, но результаты § 5 не позволяют утверждать, что, скажем, цены европейских опционов-колл можно определять через арбитраж.

Наш анализ проводился для рынка, где агенты потребляют только в даты 0 и T. Обычным образом это можно представить как частный случай равновесного компромиссного анализа между потреблением в этих двух датах, где потребления в другие даты фиксированы. Для исследования ФП, по которым могут производиться платежи в даты до T, включая ФП, которые могут выплачивать дивиденды, и ФП, которые исполняются в случайные даты, полезно распространить рассмотренный анализ на случай, когда и потребление возможно в любые даты. Для подробного изложения потребуется довольно много места, и это изложение будет содержать многочисленные повторения в рассуждениях, поэтому оно здесь не приводится. Следует заметить, что как только нормировка выбрана таким образом, чтобы имелась безрисковая ЦБ с нулевой процентной ставкой, основные результаты, которые были даны, будут справедливы. Причина этого в следующем: представим ФП функцией x: $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{T} \to R$, где $x\,(\omega, t)$ является *полной* суммой, выплаченной по ФП во временном интервале $(0, t)$, когда реализуется ω. Например, если по ФП непрерывно выплачиваются платежи по норме $d(\omega, t)$ до некоторого случайного момента времени τ, а затем остальная положенная сумма $l(\omega, \tau)$, то будем иметь

$$x(\omega, t) = \int_0^{t\wedge\tau} d(\omega, s)ds + l(\omega, \tau) \times \mathbf{1}_{\{\tau \le t\}}.$$

Рассмотрим какую-нибудь ФП, представленную таким образом, и другую ФП x', для которой $x'(\omega, t) = 0$ для всех $t < T$, но при погашении $x'(\omega, T) = x(\omega, T)$. То есть x' ничего не выплачивает до момента времени T, в который происходит выплата *всей* суммы, полагающейся по ФП x в течение времени от 0 до T. Предполагая модель жизнеспособной, цену x определяемой арбитражем, если и только если x' существует, то их арбитражные стоимости будут одинаковы. Это имеет место, поскольку агент, обладая ФП x, может инвестировать платежи, накопленные к моменту T, в безрисковый актив. Так как безрисковая процентная ставка равна нулю, по ФП выплачивается $x(\omega, T)$ в дату T, что полностью совпадает с $x'(\omega, T)$. С другой стороны, если агент обладает x', он может взять ссуду и использовать безрисковый актив, чтобы получить доход x, и в дату T ФП x' обеспечит фонды, чтобы покрыть этот долг. Таким образом, ценность ФП x и x' одинакова. Разработанная выше теория позволяет узнать, будут ли ФП x' иметь свои цены, определяемые арбитражем, и если это так, то они будут также иметь свои арбитражные стоимости.

Дивиденды, выплачиваемые исходными активами, могут исследоваться таким же образом. Не рассматривая это подробно, мы только отметим, что имеется несколько способов анализа этой проблемы. Дивиденды могут «мгновенно» реинвестироваться или в выпускаемую ЦБ, или в безрисковый актив. С другой стороны, накапливаемые дивиденды могут вычитаться из определяемой стоимости ФП.

Опционы являются финансовыми инструментами, владелец которых имеет возможность определять форму и расписание платежей. Мы моделируем такой опцион как набор ФП $\{x_\alpha;\ \alpha \in A\}$ и владелец имеет право определять при исполнении, какую ФП x_α он выбирает. Например, американские путы являются такими наборами, в которых $\alpha \in A$ находит моменты остановки относительно $\{F_t\}$. (Мы еще вернемся к этому примеру.) Для модели жизнеспособного рынка ЦБ обозначим символом **P** множество эквивалентных мартингальных мер. Тогда при любом выборе α ФП x_α стоит не менее чем $\inf_{P^* \in \mathbf{P}} E^*(x_\alpha)$ и не более чем $\sup_{P^* \in \mathbf{P}} E^*(x_\alpha)$. Таким образом, опцион стоит по меньшей мере $\sup_{\alpha\in A} \inf_{P^*\in \mathbf{P}} E^*(x_\alpha)$ и по большей мере $\sup_{\alpha\in A} \sup_{P^*\in \mathbf{P}} E^*(x_\alpha)$. Когда эти два числа одни и те же, цена опциона определяется арбитражем, а общая цена является арбитражной стоимостью. Когда **P** состоит из одного элемента, два числа одинаковы, и стоимость опциона равна $\sup_{\alpha\in A} E^*(x_\alpha)$, где $E^*(.)$ означает математическое ожидание относительно единственной эквивалентной мартингальной меры. Заметим, что в таких случаях выбор стратегии α является независимым от отношения владельца к риску.

Приведем пример, иллюстрирующий три обобщения, сделанные выше. Возьмем модель Блэка – Шоулса, когда r может отличаться от нуля, и рассмотрим задачу определения стоимости американского пута с ценой исполнения a и датой истечения T. Если пут исполняется, используя правило остановки τ, то он производит $(a - Z_1(\tau))^+$ в момент τ. Если $Z_1(\tau) > a$, правило τ интерпретируется так, как будто пут никогда не исполнится. Сначала перейдем к модели с нулевой процентной ставкой, получая Z', как и выше. В штрихованной модели опцион, исполняемый по правилу τ, производит $(a \exp(-r\tau) - Z'_1(\tau))^+$ в момент τ. Это эквивалентно ФП, которая дает $(a \exp(-r\tau) - Z'_1(\tau))^+$ в момент T при помощи второго обобщения. Такая ФП имеет арбитражную стоимость

$$E[(a \exp(-r\tau) - Z_1^*(\tau))^+],$$

где $dZ_1^*(t) = \sigma Z_1^*(t)dW(t)$ в соответствии с § 5.

Таким образом, опцион-пут имеет арбитражную стоимость

$$\sup_\tau E[(a \exp(-r\tau) - Z_1^*(\tau))^+],$$

где супремум вычисляется по всем возможным моментам остановки τ, $0 \le \tau \le T$. (Он является арбитражной стоимостью как в исходной, так и в штрихованной моделях, когда $Z_0(0) = 1$.) Определение стоимости этого пута сводится к задаче оптимальной остановки, к которой можно применить методы теории потенциала.

Совсем просто расширить пределы нашего ограничения на X на квадратично интегрируемые ФП и применение L^2-нормированной топологии. В § 2 мы использовали только то, что X является вещественным линейным пространством F-измеримых случайных величин на Ω и что топология на X является линейной, хаусдорфовой и локально выпуклой. (Также необходимо, чтобы если $x \in X$ и x' является случайной величиной такой, что $P(x = x') = 1$, то x' и x идентифицировались как один и тот же элемент пространства X.) Для любого вещественного пространства F-измеримых случайных величин на Ω с топологией, которая удовлетворяет этим требованиям, теорема 3.1 доказывается точно так же, как и выше.

Соответствие между функционалами $\psi \in \Psi$ такими, что $\psi \mid M = \pi$, и эквивалентными мартингальными мерами (теорема 3.2) мы устанавливали при помощи теоремы представления Рица. То есть ψ является непрерывным линейным функционалом на X, если и только если $\psi(x) = E\,(\rho x)$ для некоторого $\rho \in L^2(\Omega, F, P)$. Это свидетельствует о том, что данный непрерывный линейный функционал ψ, определяющий $Q(B) = \psi(\mathbf{1}_B)$, создавал ($\sigma$-аддитивную) меру, абсолютно непрерывную относительно P и удовлетворяющую условию $dQ/dP \in L^2$. Наоборот, при заданной вероятностной мере Q, абсолютно непрерывной относительно P и удовлетворяющей условию $dQ/dP \in L^2$, определение $\psi\,(x) = E^*(x)$ для $x \in X$ создает непрерывный линейный функционал на X. Предположим, мы выбрали $p \in [1, \infty]$, и примем, что $X = L^p(\Omega, F, P)$ с такой топологией, чтобы функционал ψ являлся непрерывным линейным функционалом на X тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $\psi(x) = E(\rho x)$ для некоторого $\rho \in L^q(\Omega, F, P)$, где $q^{-1} + p^{-1} = 1$. Например, если $p < \infty$, тогда топология на X может быть стандартной L^p-нормированной топологией. Если $p = \infty$, топология на X может быть L^1-Mackey топологией. Нам нужно предположить, что $Z_k\,(t) \in X$ для всех k и t, и изменить определение эквивалентной мартингальной меры, чтобы считать, что $dQ/dP \in L^q$. (Чтобы вычислять необходимые условные математические ожидания, нам также нужно потребовать, чтобы торговая стратегия θ была простой и $\theta_k\,(t)$ $Z_k\,(t) \in X$ для всех k и t.) С этими изменениями, вывод можно делать точно так, как в § 3.

В случае диффузии возникают трудности. Полученные ранее результаты требуют, чтобы $\rho \in L^2$. Однако мы знаем только условия, при которых имеется единственная эквивалентная мартингальная мера Q такая, что $dQ/dP \in L^2$. Если бы, используя терминологию предыдущего абзаца, мы выбрали $p < 2$, тогда требование изменилось бы на $dQ/dP \in L^q$, где $q > 2$. Оно более строгое, чем $dQ/dP \in L^2$, так что по условию теоремы 3.3 *самое большее* имеется единственная эквивалентная мартингальная мера. Если эта мера удовлетворяет условию $dQ/dP \in L^q$, то модель жизнеспособна, и цены всех ФП определяются арбитражем. Если эта мера не удовлетворяет условию $dQ/dP \in L^q$, тогда модель нежизнеспособна. Например, рассмотрим модель Блэка – Шоулса для случая $\mu + \sigma^2/2 \neq 0$. Производная Радона – Никодима dQ/dP может быть вычислена явно, и она не удовлетворяет условию $dQ/dP \in L^\infty$. Таким образом, если $p = 1$, модель Блэка – Шоулса не является жизнеспособной моделью экономического равновесия.

Если же $p > 2$, то требованием для $q < 2$ становится $dQ/dP \in L^q$. Оно менее строгое. Хотя теорема 3.3 устанавливает жизнеспособность класса моделей для $p > 2$, она не показывает, что цена каждой ФП определяется арбитражем. Для этого, требуется усиливать результаты, лежащие в основе разработанной выше теории.

Заключительные замечания

Основной вопрос, рассмотренный в этой главе, следующий. Какие ФП «охватываются» заданным набором ЦБ, которыми торгуют на рынке? В главе использовались линейные функционалы для определения стоимости ФП, чья цена определяется через арбитраж. Материал главы может рассматриваться как теоретическое обоснование результатов гл. 2, где приводится следующее важное наблюдение. Если ФП оценена через арбитраж в среде с одной акцией и одной облигацией, то ее стоимость может быть найдена сначала изменением модели так, чтобы акция зарабатывала по безрисковой ставке, а затем вычислением ожидаемой стоимости ФП. В гл. 2 анализируются два примера, и в каждом случае определяется правильная модификация в соответствии со следующей процедурой. Сначала, используя технику Блэка – Шоулса, получаем аналитическое соотношение (дифференциальное или дифференциально-разностное уравнение), которому должна удовлетворять стоимость ФП. Наблюдая, что один параметр модели не появляется в этих соотношениях, приспосабливаем его значение так, чтобы акция зарабатывала по безрисковой ставке. Первым примером является диффузионная модель Блэка – Шоулса, где свободный параметр – коэффициент дрейфа процесса цены акции. Во втором примере процесс цены акции Y удовлетворяет соотношению

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t aY(s)dN(s) - \int_0^t bY(s)ds, \qquad (3.15)$$

где $N = \{N(t);\ 0 < t < T\}$ – процесс Пуассона с интенсивностью скачка λ; a и b – определенные положительные константы.

Оказывается, что свободным параметром является λ и что при $\lambda^* = b/a$ процесс Y обеспечивает получение дохода по безрисковой ставке (нулевой).

В § 6 для модели Блэка – Шоулса мы нашли производную Радона – Никодима *единственной* эквивалентной мартингальной меры Q, при которой акция зарабатывает по безрисковой ставке. Подстановка Q вместо P эквивалентна регулированию коэффициента дрейфа, рассмотренного в гл. 2. Для модели скачкообразного процесса (3.15) также существует единственная эквивалентная мартингальная мера Q и замена Q на P выполняет подстройку интенсивности скачков модели, рассмотренной в гл. 2, без какого-либо воздействия на параметры a и b. Кроме того, можно вычислить в явной форме производную Радона – Никодима Q относительно P. В принципе, относительно трудная задача вычисления dQ/dP может быть решена и может быть выполнено доказательство того, что Q – фактически единственная эквивалентная мартингальная мера.

Может показаться довольно странным сравнение результатов гл. 2 с результатами этой главы, поскольку в гл. 2 утверждается, что арбитраж является независимым предпочтением, а в изложенной выше теории арбитраж кардинально привязан к специфическому классу агентов, классу **A**. Однако ясно, как примирить эти две позиции. Когда в гл. 2 строятся предпочтения агента, нейтрального к риску, определяющему арбитражную стоимость ФП, это соответствует построению эквивалентной мартингальной меры. В обоих упомянутых примерах построенные показатели предпочтения сохраняют пустые множества исходной меры и непрерывность в том же смысле, что требуется и здесь. То есть их нейтральный к риску агент является членом введенного здесь класса **A**, как и должно быть.

ГЛАВА
4

МАРТИНГАЛЫ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ В ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНОЙ ТОРГОВЛИ

§ 1. ПОСТАНОВКИ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ

В этой главе будет разработана общая стохастическая модель невязкого рынка ЦБ с непрерывной торговлей. Векторный процесс цен задается полумартингалом определенного класса, и для представления прибыли капитала используется общий стохастический интеграл. В рамках этой модели рассмотрим современную теорию определения стоимости зависимых исков, включая знаменитую формулу Блэка – Шоулса для определения цены опционов. Будет показано, что рынок ЦБ является полным, если и только если его векторный процесс цен имеет определенное свойство мартингального представления. Многомерное обобщение модели Блэка – Шоулса исследовано несколько детальнее, а другие примеры обсуждены кратко.

Вначале представим краткий обзор избранных результатов. Основной предмет главы – теория рынков ЦБ с непрерывной торговлей, что является очень важной темой в финансовой экономике. Рассмотрим общую стохастическую модель невязкого рынка без организационных затрат (*frictionless*) с непрерывной торговлей, в дальнейшем называемого просто *непрерывным рынком* (*continuous market*), затем обсудим современную теорию определения стоимости зависимых исков (определения цены опционов) в контексте этой модели. Описанная здесь математическая структура также потенциально полезна для изучения проблем инвестирования/потребления, но с этой темой непосредственно не будем иметь дела.

Упоминая современную теорию определения стоимости случайных зависимых исков, прежде всего имеем в виду формулу определения цены опционов Блэка – Шоулса (1973). Поэтому начнем главу с краткого изложения теории Блэка – Шоулса и смежных вопросов. В целях введения некоторые термины будут использоваться во временном узком смысле, а математические определения устанавливаться неформально или даже вообще опускаться. Для более или менее конкретной мотивации общей теории делается акцент на единственную экономическую проблему, которую мы называем полнотой рынка.

Формула определения цены опционов

Пусть $W = \{W_t;\ 0 \le t \le T\}$ будет процессом стандартного (с нулевым дрейфом и единичной дисперсией) броуновского движения на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P), а r, μ и σ – числовые константы с $\sigma > 0$. Естественно предполагать, что в рассматриваемом случае $\mu > r > 0$, но это ограничение не является необходимым. Теперь определим

$$S_t^0 \equiv S_0^0 \exp(rt), \quad 0 \le t \le T, \tag{4.1}$$

$$S_t^1 \equiv S_0^1 \exp(\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4.2}$$

где начальные ценности S_0^0 и S_0^1 – положительные константы.

Такие обозначения используется во всей главе. Временной параметр процесса дается нижним индексом, а компоненты векторного процесса цены актива S – верхним индексом $k = 0, 1, \ldots, K$. Различие между верхним индексом и показателем степени будет всегда ясно из контекста. Интерпретируем S_t^0 как цену безрисковой облигации в момент времени t при соответствующей безрисковой процентной ставке (*riskless interest rate*) r. Интерпретируем S_t^1 как цену во время t за акцию (*share*) акционерного капитала (*stock*), за которую не выплачивается никаких дивидендов. В более общем смысле мы могли бы называть S^0 и S^1 соответственно процессами цен для безрисковых активов (*riskless security*) и рисковых активов (*risky security*). Для наших целей единица актива k может рассматриваться просто как ЦБ, которую можно обменять на S_t^k денежных единиц в любое время t ($k = 0, 1$). Рыночная стоимость облигации экспоненциально растет при ставке r, в то время как рыночная стоимость акции флуктуирует случайно.

Применяя формулу Ито к равенствам (4.1) и (4.2), заметим, что наши ценовые процессы S^0 и S^1 удовлетворяют стохастическим дифференциальным уравнениям

$$dS_t^0 = r\, S_t^0 dt, \tag{4.3}$$

$$dS_t^1 = \mu\, S_t^1 dt + \sigma\, S_t^1 dW_t. \tag{4.4}$$

Уравнения (4.2) и (4.4) можно переформулировать, говоря, что S^1 является геометрическим броуновским движением со *ставкой доходности* (*rate of return*) $dS_t^1 / S_t^1 = \mu dt + \sigma dW_t$. Эта терминология нестрогая, так как W недифференцируемое, и в тексте главы мы будем просто называть $\mu t + \sigma W_t$ *процессом доходности акции* (*return process*).

Рассмотрим инвестора, действующего на рынке ЦБ, где торгуют этой акцией и этой облигацией. Предположим, инвестору разрешается торговать непрерывно, на этом рынке нет никаких операционных затрат (таких, как выплаты брокерам) и инвестор может продавать коротко без ограничения (см. ниже). С учетом этих предположений, говорим, что такой рынок является *невязким* (*frictionless*) рынком с непрерывной торговлей. Теперь рассмотрим бумагу, которая дает право ее предъявителю покупать одну долю акции в дату погашения T, если он желает, за установленную цену c долларов. Такая бумага – это европейский опцион-колл на акцию с *ценой исполнения* (*exercise price*) c и *сроком истечения* (*expiration date*) T. Если $S_T^1 < c$ (в момент истечения цена акции ниже цены исполнения), тогда предъявитель бумаги не будет исполнять свой опцион, т. е. покупать акцию, и эта бумага ничего не будет стоить в момент истечения. Но если $S_T^1 \geq c$, предъявитель может купить одну долю акции за c денежных единиц, затем в свою очередь продать ее за S_T^1 долларов, получая прибыль $S_T^1 - c$. Таким образом, мы видим, что опцион-колл полностью эквивалентен бумаге, которая дает право предъявителю на получение $X = (S_T^1 - c)^+$ денежных единиц в дату T.

Теперь уместен вопрос: сколько денежных единиц хотел бы заплатить инвестор за такую бумагу в нулевой момент времени? Или по-другому: какова стоимость опциона? Из общих соображений кажется совершенно разумным, что разные люди могли бы давать различные ответы в зависимости от их отношения к риску, так как приобретение колла, бесспорно, является рисковой инвестицией. Но Блэк и Шоулс нашли, что имеется *единственная* рациональная стоимость опциона независимо от отношения к риску. Конкретно, если определить

$$f(x, t) = x\,\Phi(g(x, t)) - ce^{-rt}\,\Phi(h(x, t)), \qquad (4.5)$$

где

$$g(x, t) = [\ln(x/c) + (r + \sigma^2/2)\,t] / \sigma\sqrt{t}, \quad h(x, t) = g(x, t) - \sigma\sqrt{t},$$

и Ф(.)− стандартная нормальная функция распределения, то этой единственной рациональной стоимостью является $f(S_0^1,\ T)$. Заметим, что в формуле стоимости (4.5) используются текущая цена акции x, дата истечения t, цена исполнения c, дисперсия доходности σ^2 и безрисковая процентная ставка r, но не содержится средней ставки доходности акции μ.

Обоснование, данное Блэком и Шоулсом при выводе формулы стоимости опциона, не полностью удовлетворительно в математическом плане, поэтому в литературе по финансовой экономике появились другие подходы. Фактически обоснование формулы определения стоимости опционов превратилось в направление исследований. Лучшим из них признается подход Мертона, который был представлен в гл. 2.

Теория портфеля и определение стоимости опциона

Легко проверить, что функция $f(x,\ t)$, определяемая по формуле (4.5), удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial f(x,\ t)}{\partial t}=\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\,\frac{\partial^2 f(x,\ t)}{\partial x^2}+\frac{\partial f(x,\ t)}{\partial x}-rf(x,\ t) \tag{4.6}$$

с начальным условием

$$f(x,\ 0)=(x-c)^{+}. \tag{4.7}$$

Фактически Блэк и Шоулс получили свою формулу определения стоимости опциона, решая уравнение (4.6) с условием (4.7). Теперь определим стохастические процессы:

$$V_t=f(S_t^1,\ T-\ t),\qquad 0\le t\le T, \tag{4.8}$$

$$\varphi_t^1=\frac{\partial}{\partial x}f(S_t^1,\ T-\ t),\qquad 0\le t\le T, \tag{4.9}$$

$$\varphi_t^0=(V_t-\ \varphi_t^1 S_t^1)\,/\,S_t^0,\qquad 0\le t\le T. \tag{4.10}$$

Векторный процесс $\varphi_t=(\varphi_t^0,\ \varphi_t^1)$ интерпретируется как стратегия торговли, с конкретизацией числа φ_t^k единиц актива k, которым владеют в момент времени t. Предположим, что φ_t является портфелем ЦБ, которым владеют в момент времени t. Из равенства (4.10) видим, что рыночная стоимость портфеля, которым владеют в момент времени t, равна

$$\varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t^1 S_t^1 = V_t, \ 0 \le t \le T.$$

Таким образом, используя равенства (4.7) и (4.8), получаем начальную стоимость портфеля $V_0 = f(S_0^1, T)$, а стоимость портфеля при погашении $V_T = f(S_T^1, 0) = (S_T^1 - c)^+$ в точности равна стоимости опциона-колл в момент погашения. Наконец, применяя формулу Ито к представлению (4.8), получаем

$$dV_t = \frac{\partial}{\partial x} f(S_t^1, T-t)\, dS_t^1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(S_t^1, T-t)(dS_t^1)^2 +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} f(S_t^1, T-t)\, dt. \qquad (4.11)$$

Используя соотношения (4.3), (4.4), (4.6) и (4.8) – (4.10), в конечном счете уравнение (4.11) сводим к виду

$$dV_t = \varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t^1 dS_t^1. \qquad (4.12)$$

Точная интегральная форма (4.12) имеет вид

$$V_t - V_0 = \int_0^t \varphi_u^0 dS_u^0 + \int_0^t \varphi_u^1 dS_u^1, \ 0 \le t \le T. \qquad (4.13)$$

Правая сторона равенства представляет полный доход, или прибыль капитала, которую инвестор реализует с помощью своих активов к моменту времени t (см. § 3). Таким образом, форма (4.13) свидетельствует о том, что все изменения стоимости портфеля инвестора обязаны прибыли капитала в противоположность изъятию наличных денег или вливанию новых фондов. На языке гл. 3 – это стратегия самофинансирования, что завершает мотивировку формулы определения стоимости (4.5).

Зафиксируем стратегию торговли, которая требует начальной инвестиции $\pi = f(S_0^1, T)$, и после этого построим точно такую же модель потоков платежей, как у опциона-колл. Это означает, что опцион воспроизводим (*attainable*) на рассматриваемом рынке с ценой π в нулевой момент времени портфелем только из акции и облигации. В экономической литературе общепринято идти далее, рассуждая, что арбитражная прибыль могла быть сделана, если опционы были проданы на параллельном рынке по какой-либо цене, другой, чем π, и что существование арбитражных возможностей противоречит равновесию в полной экономической системе. Для получения содержательной математической теории остановимся на утверждении воспроизводимости. В этой главе мы рассматриваем изолированный рынок, на котором торгуют определенными ЦБ, принимая, что никакие арбитражные возможности не существуют внутри этого рынка (см. § 2). Мы стремимся характеризовать класс финансовых производных, которые достижимы для инвесторов, и цены, по которым они могут быть воспроизводимы, только с помощью названных ЦБ. Например, при рассмотрении оценочной формулы (4.5) мы сосредоточили внимание на рынке, где торгуют только акциями и облигациями, и обнаружили, что инвесторы могут воспроизводить опционы-колл для себя на этом рынке по цене, определяемой по формуле (4.5).

В заключение вернемся к предположению о неограниченных коротких продажах. С точки зрения нашей формальной теории это просто означает, что любая составляющая портфеля k может быть отрицательной. Короткая продажа облигации соответствует заимствованию (а не аренде) денег по безрисковой процентной ставке r. Для частной торговой стратегии φ, определяемой соотношениями (4.9) и (4.10), можно проверить, что V и φ^1 являются положительными, но φ^0 может быть отрицательным. Таким образом, чтобы дублировать поток платежей опциона-колл, инвестор всегда будет обладать положительной суммой акционерного капитала, но, возможно, ему надо будет финансировать приобретение части акций инвестора путем безрискового заимствования (коротко продавая облигации). В частности, формула (4.5) определения стоимости опциона-колл фактически не требует предположения, что акцию можно продать коротко без ограничения, но короткая продажа акции может потребоваться, чтобы воспроизводить потоки платежей других типов опционов. Объяснение коротких продаж можно найти в книге У. Шарпа (1978).

Полнота рынка

Выше мы обосновали формулу определения стоимости (4.5) без предположений, при которых она была выведена впервые. Получение формулы, или точнее наш подход к ее получению, будет рассмотрен в

§ 5, где мы также покажем, что результат предыдущего подпараграфа о воспроизводимости может быть существенно обобщен. Дело в следующем. Пусть

$$F_T = F\{S_t;\ 0 \leq t \leq T\}$$

означает, что F_T состоит из всех событий, чье появление или непоявление может быть определено по характеру изменения цены акции до момента времени T. Определим финансовую производную или зависимую выплату (*contingent claim*) как неотрицательную случайную переменную X, измеримую относительно F_T (в дальнейшем будем писать $X \in F_T$). Такое определение является нашим формальным представлением для актива, дающего право предъявителю на оплату в момент времени T, размер которой зависит (произвольным способом) от эволюции цены до T. Конечно, данное определение можно расширить, чтобы рассмотреть выплаты в другие моменты времени, но это усложнит обозначения. Для европейского опциона-колл, рассмотренного выше, $X = (S_T - c)^+$. Обобщая упомянутые ранее идеи, можно сказать, что зависимая выплата X достижима при цене π на нашем рынке ЦБ, если почти наверное существует самофинансирующая торговая стратегия φ с соответствующим процессом рыночной стоимости V таким, что $V_0 = \pi$ и $V_T = X$. Чтобы сделать это строгим, конечно, потребуется общее определение стратегии самофинансирования (и связанного с ней процесса стоимости), но мы полагаем, что смысл определения ясен. Замечательное свойство описанной диффузионной модели – это то, что каждая зависимая выплата достижима, и можно даже записать общую (точнее, абстрактную) формулу определения стоимости для цены π, связанной с данной выплатой X. Формула определения стоимости имеет вид

$$\pi = \exp(-rT)\, E^*(X), \tag{4.14}$$

где $E^*(.)$ – оператор математического ожидания, связанный с (очень специфической) вероятностной мерой Q на (Ω, F). Мера Q эквивалентна P, т. е. $Q(A) = 0$, если и только если $P(A) = 0$ (две меры имеют те же нулевые множества). Формула Блэка – Шоулса (4.5) является частным случаем выражения (4.14).

Нестрого принимая стандартные термины экономической теории, будем говорить, что модель рынка ЦБ полная, если каждая зависимая выплата воспроизводима. (В § 3 дано строгое определение.) Полнота модели Блэка – Шоулса, в несколько ином смысле, и общая формула определения стоимости (4.14) была доказана в гл. 3.

Важной и интересной особенностью модели Блэка – Шоулса является ее полнота, а не тот факт, что она дает явную формулу определения стоимости (4.5) опциона-колл. Мы принимаем эту точку зрения в гл. 4, исследуя структурные особенности различных моделей, не проводя расчетов в явной форме. (Хотя в конце главы даются расчеты, которые иллюстрируют практичность подхода.) С этой точки зрения следующий вопрос является как естественным, так и фундаментальным

Предположим, что рассмотренный векторный процесс цены заменен некоторым другим положительным векторным процессом $S = \{S_t;\ 0 \le t \le T\}$ с сохранением без изменений всех других предположений и определений. Какие процессы S дают полный рынок? (4.15)

Значительная доля нашего внимания уделяется этому вопросу. Рассуждения будем доводить до степени, когда проблема приобретет строгую математическую форму, после чего она сведется к эквивалентной задаче из теории мартингалов.

Сделаем два наблюдения. Во-первых, отметим, что для полноты рынка не является ни необходимым, ни достаточным то, что процесс цены S имеет непрерывные выборочные траектории. В частности, воспроизводимость опциона-колл в описанной модели требует намного больше, чем непрерывность процесса цены акции, хотя, конечно, принятые точные предположения о распределении можно ослабить (пример рассмотрен в § 6). Во-вторых, марковское свойство совершенно не соответствует вопросу, сформулированному в предположении (4.15). Фактически может быть сделано более сильное утверждение.

Рассмотрим рыночную модель, в которой процесс цены активов S определен на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P). Теперь рассмотрим вторую модель, идентичную предыдущей во всех отношениях, за исключением того, что P заменена на эквивалентную вероятностную меру Q. Тогда зависимая выплата будет воспроизводимой при цене π в первой модели, если и только если она воспроизводима при той же цене во второй модели. Следовательно, первая модель полная, если и только если полная вторая. Эти утверждения не могут быть очевидны, так как точные определения не давались, но будем надеяться, что они, по крайней мере, правдоподобны в этом месте. Сформулируем утверждение по-другому, когда для решения вопроса (4.15) уместны только нулевые множества распределения S. При выяснении, является ли каждая зависимая выплата, получаемая из S, достижимой на рынке, нас интересуют только такие множества выборочных траекторий, которые либо имеют, либо не имеют положительной вероятности. Таким образом, сведения из теории вероятности, необходимые для ответа на вопрос (4.15), – это результаты, обеспечивающие инвариантность при переходе к эквивалентной мере.

Вероятностная постановка

Прежде чем строго сформулирвать вопрос полноты (4.15), нужно иметь общую модель рынка с непрерывной торговлей. Опишем минимальную структуру модели, необходимую для изучения ее полноты, опуская некоторые особенности теории, фактически разрабатываемой позже. Наша первая задача состоит в том, чтобы решить следующие проблемы построения модели.

Какой класс векторных процессов S мог бы очевидно использоваться, чтобы представить флуктуации цены ЦБ?
Как следует определить торговую стратегию вообще и каким является надлежащее определение самофинансирующей стратегии? (4.16)

Для простоты рассмотрим только процессы цены S с $S_t^0 = \exp(rt)$, предполагая, что безрисковая процентная ставка является и детерминированной, и постоянной. Пусть $\beta_t = \exp(-rt)$ и β назовем *внутренним дисконтированным процессом* (*intrinsic discount process*) для S. Будет показано, что если требуется построить внутренне последовательную теорию, то нужно рассматривать только такой процесс цены S, чтобы

дисконтированный векторный процесс цен βS являлся мартингалом по некоторой вероятностной мере Q, эквивалентной P. (4.17)

Именно эта Q, называемая иногда *эталонной мерой* (*reference measure*), входит в общую формулу определения стоимости (4.14). Последствием требования (4.17) является то, что S должен быть так называемым *полумартингалом*, и у нас, к счастью, есть в наличии хорошо развитая теория, имеющая дело с заменой меры для полумартингалов. Эта теория, которая развилась из теоремы Гирсанова (1960) для процессов Ито, является строгой, что необходимо для проверки или опровержения условия (4.17) в любой заданной модели.

Обратившись к проблеме моделирования (4.16), определим торговую стратегию φ как предсказуемый векторный процесс. Определим прибыль капитала согласно стратегии φ как стохастический интеграл от φ относительно векторного процесса цены S, а затем – стратегию самофинансирования точно так же, как в соотношении (4.13). Поскольку процесс цены – полумартингал, то в наличии имеется необходимая общая теория стохастического интегрирования. Наконец, находим, что наша модель полная, если и только если каждый процесс, который является мартингалом при Q, может быть записан как стохастический интеграл относительно процесса βS в условии (4.17). На языке теории мартингалов модель полна, если и только если βS имеет свойство мартингального представления при нашей эталонной мере Q.

Сказанное предназначено, чтобы предположить, что современная теория мартингалов и стохастических интегралов обеспечивает строго математическую структуру, необходимую для теории непрерывной торговли. Поскольку такой подход интенсивно развивается, появится больше общих результатов в математической теории, которые выглядят так, как будто они были созданы для этого применения. Можно надеяться, что все стандартные проблемы, изучаемые в теории мартингалов, и все главные результаты найдут интерпретации и применения в рыночных постановках.

Для усвоения результатов, представленных в этой главе, необходимо хорошее знание теории вероятностей и стохастических процессов, но никакого специального знания экономики. Большая часть материала будет доступна для тех, кто знает стохастическое интегрирование по броуновскому движению, а остальное должно стать понятным после небольшого изучения уместного основополагающего материала. (При ознакомлении с материалом полезно интерпретировать общие результаты как случай, когда S становится процессом Ито.)

Основным в этой главе будет § 3, который содержит общую теорию непрерывных рынков. В § 2 дано частичное развитие аналогичной теории для конечных рынков. (Конечный рынок – это рынок, где торговля имеет место в дискретные моменты времени, и лежащее в основе вероятностное пространство конечно.) Обращаясь сначала к конечному случаю, мы способны ослабить постановку в нескольких отношениях. Во-первых, необходимые экономические понятия представлены в простой постановке. Имея интерпретированное или оправданное определение в конечном случае, мы обычно представляем его формальный аналог и переходим без дальнейшего комментария к развитию общей теории. Во-вторых, в конечном случае мы способны дать адекватное исследование некоторых основополагающих проблем, которые будут, по существу, оправданием при развитии общей теории. Наконец, техническая сложность, с которой каждый сталкивается в случае непрерывного времени, затеняет основную структуру математической теории. Обращаясь сначала к конечному случаю, мы надеемся установить естественную роль мартингальной техники и, таким образом, мотивировать достаточно сложные выводы § 3.

В заключение дадим некоторые общие комментарии относительно терминологии и примечаний. Термин «положительный» используется в будущем в слабом смысле, в противоположность строго положительному, и аналогично употребляется термин «увеличение» в противоположность строгому увеличению. Когда пишем $X = Y$ для случайных переменных X и Y, это понимается как «почти наверное», и аналогично для $X \geq Y$. Для процессов $X \geq Y$ означает $X_t \geq Y_t$ для всех t. В частном случае будем писать $X = 0$ или $X \geq 0$, где X может быть или случайной переменной или процессом. Символ $\equiv$ используется, чтобы обозначать равенство по определению.

§ 2. КОНЕЧНАЯ ТЕОРИЯ

Рассмотрим основные понятия для случая, когда время изменяется дискретно, а выборочное пространство – конечно. Такое представление предназначено не для всестороннего систематического изучения конечного случая, а скорее для мотивации и облегчения понимания непрерывной модели торговли, которая представлена в § 3. Большинство полученных здесь результатов аналогичны результатам гл. 2.

Формулировка рыночной модели

Вероятностное пространство (Ω, F, P) является определенным и фиксированным. Выборочное пространство Ω имеет конечное число элементов, каждый из которых рассматривается как возможное состояние среды. Для всех $\omega \in \Omega$ мы принимаем $P(\omega) > 0$, и это – единственная роль вероятностной меры. Мы предполагаем сообщество инвесторов, которые договариваются о том, какие состояния среды являются возможными, но которые не обязательно соглашаются с оценками вероятности. Все определения и результаты остаются теми же, если P заменяется любой эквивалентной мерой вероятности.

Горизонт времени T определим как предельную дату всей рассматриваемой экономической деятельности. Фильтрация $\mathbf{F}$ определяется как семейство $\mathbf{F} = \{F_0, F_1,\dots, F_T\}$, в котором каждая F_t является алгеброй подмножеств из Ω с $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_T$. Без какой-либо реальной потери общности примем, что $F_0 = \{\varphi, \Omega\}$, а $F_T = F$ – множество всех подмножеств.

Ценные бумаги (*security*) продаются и покупаются в моменты времени $t = 0, 1,\dots, T$, а фильтрация $\mathbf{F}$ описывает процесс получения информации инвесторами. Каждая F_t соответствует единственному разбиению P_t множества Ω, и в момент времени t инвесторы знают, какая ячейка этого разбиения содержит истинное состояние среды, но не больше.

В качестве основного в нашей модели принимается $(K + 1)$-мерный стохастический процесс $S = \{S_t;\ t = 0, 1,\dots, T\}$ с процессами-компонентами $S^0, S^1,\dots, S^K$. Считается, что каждая составляющая S^k строго положительная и адаптированная к $\mathbf{F}$. Последнее означает, что функция $\omega \to S_t^k(\omega)$ является измеримой относительно F_t (что записывается $S_t^k \in F_t$) для каждых k и t. Интерпретируем S_t^k как цену актива k в момент времени t так, что адаптированный процесс S означает, что инвесторы в каждый момент времени t знают прошлые и текущие цены $(K + 1)$ ЦБ.

Нулевая ЦБ играет несколько специфическую роль, поскольку мы принимаем, что $S_0^0 = 1$, и это сделано без потери общности. Такую ЦБ мы называем *облигацией* (*bond*) даже в тех случаях, когда не делаем никаких предположений, которые реально отличают ее от других ЦБ. В непрерывной теории облигация будет иметь некоторые специальные особенности, которые отличают ее от других ЦБ. Определим процесс β равенством $\beta_t = (1/ S_t^0)$ и назовем его *процессом дисконтирования* (*discount process*). В частном случае постоянной положительной безрисковой процентной ставки r процесс $S_t^0 = (1 + r)^t$.

Определим торговую стратегию (*trading strategy*) как предсказуемый векторный процесс $\varphi = \{\varphi_t,\ t =1,\dots, T\}$ с компонентами $\varphi^0, \varphi^1,\dots, \varphi^K$. *Предсказуемый* (*predictable*) *процесс* означает, что $\varphi_t \in F_t$ для $t =1,\dots, T$. Интерпретируем φ_t^k как количество ЦБ типа k (в физических единицах, аналогично акциям), которыми владеет инвестор между моментами времени $t - 1$ и t. Вектор φ_t будет называться портфелем инвестора в момент времени t, а его компоненты могут принимать как отрицательные, так и положительные значения. В частности, мы разрешаем неограниченные короткие продажи (*short sales*). Требуя, чтобы φ была предсказуемой, допускаем, что инвестор выбирает портфель φ_t в момент времени t после того, как наблюдаются цены S_{t-1}. Кроме того, портфелем φ_t инвестор должен владеть до объявления цен S_t.

Поясним некоторые используемые обозначения. Если X и Y – два векторных стохастических процесса с дискретным временем одинаковой размерности, тогда запись X_tY_s обозначает скалярное произведение $X_t^1Y_s^1 + X_t^2Y_s^2 + ...$, а запись XY – вещественный процесс, чье значение в момент времени t равно X_tY_t. Кроме того, термин ΔX_t обозначает вектор $X_t - X_{t-1}$, а термин ΔX – процесс, значение которого в момент времени t равно ΔX_t.

Ясно, что $\varphi_t S_{t-1}$ представляет рыночную стоимость портфеля φ_t сразу после того, как он был зафиксирован в момент времени $t-1$, в то время как $\varphi_t S_t$ является его рыночной стоимостью сразу после момента времени t, когда наблюдаются цены, но прежде чем какие-либо изменения делаются в портфеле. Следовательно, $\varphi_t \Delta S_t$ – это изменение рыночной стоимости из-за изменений в ценах активов, которые происходят между моментами времени $t - 1$ и t. Если инвестор использует торговую стратегию φ, тогда

$$G_t(\varphi) \equiv \sum_{i=1}^{t} \varphi_i \Delta S_i, \quad t = 1,\ldots, T, \tag{4.18}$$

представляет совокупный доход или прибыль капитала, которую инвестор реализует при ее использовании до времени t. Примем $G_0(\varphi) = 0$ и назовем $G(\varphi)$ *процессом прибыли*, ассоциированным с φ. Обратим внимание, что $G(\varphi)$ является адаптированным стохастическим процессом с вещественными значениями.

Важно заметить, что в общем случае торговая стратегия φ может предусматривать дополнения новых фондов после нулевого момента времени или позволять изъятие фондов для потребления. В противоположность этому мы говорим, что торговая стратегия φ является *самофинансирующей* (*self-financing*), если

$$\varphi_t S_t = \varphi_{t+1} S_t, \quad t = 1,\ldots, T-1. \tag{4.19}$$

Это означает, что никакие фонды не добавляются и/или не забираются из стоимости портфеля в любой из моментов времени $t = 1,\ldots, T - 1$. Используя определение (4.18), легко проверить, что равенство (4.19) эквивалентно соотношению

$$\varphi_t S_t = \varphi_1 S_0 + G_t(\varphi), \quad t = 1,\ldots, T.$$

Таким образом, торговая стратегия является самофинансирующей, если и только если все изменения стоимости портфеля вызваны чистой прибылью, полученной путем инвестиций портфеля.

Добавим еще одно ограничение. Торговая стратегия называется *допустимой* (*admissible*), если она самофинансирующая и $V(\varphi)$ – положительный процесс (в дальнейшем считаем $V(\varphi) \geq 0$), где

$$V_t(\varphi) = \begin{cases} \varphi_t S_t, & \text{если} \quad t = 1,\ldots,T, \\ \varphi_1 S_0, & \text{если} \quad t = 0. \end{cases}$$

Мы называем $V(\varphi)$ *процессом стоимости* (*value process*) для φ, так как $V_t(\varphi)$ представляет рыночную стоимость портфеля непосредственно перед моментом времени t сделки. Требуя, чтобы $V(\varphi)$ было положительным, мы говорим не только, что инвестор должен начать с положительного богатства, но и что его инвестиции должны быть такими, чтобы он никогда не попадал в состояние долга. Такое ограничение является довольно обычным в финансовой литературе. Так как цены активов положительные, это имеет эффект запрещения некоторых видов коротких продаж. Пусть $\mathbf{\Phi}$ обозначает множество всех допустимых торговых стратегий.

Случайный иск (*зависимая выплата*, *contingent claim*) – это просто неотрицательная случайная переменная X. Его можно рассматривать как контракт или соглашение, по которому выплачивается $X(\omega)$ денежных единиц в момент времени T, если состояние ω допустимо. Пусть $\mathbf{X}$ обозначает множество всех таких случайных исков. Легко видеть, что $\mathbf{X}$ – выпуклый конус. Случайный иск X достижимый (*attainable*), если существует стратегия $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ такая, что $V_T(\varphi) = X$. В этом случае будем говорить, что φ *порождает* X и что $\pi = V_0(\varphi)$ является *ценой* (в нулевой момент времени), связанной со случайным иском. Действительно ли эта цена единственная, или случайный иск может порождаться двумя различными торговыми стратегиями с начальной стоимостью V_0, являющимися различными в каждом случае? Ответы на эти вопросы будут даны ниже.

Жизнеспособность модели

Арбитражная возможность (*arbitrage opportunity*) – это стратегия $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ такая, что несмотря на то, что $V_0(\varphi) = 0$, в дату погашения $E(V_T(\varphi)) > 0$. Такая стратегия, если она существует, представляет план получения безрисковой прибыли без какой-либо инвестиции. Она не требует ни начальных фондов, ни новых фондов в последующих периодах, но так как $V_T(\varphi) > 0$, она дает возможность получить положительную прибыль путем некоторой комбинации покупок и продаж при некоторых обстоятельствах без возмещения угрозы потерь в других обстоятельствах. Рынок ЦБ, содержащий арбитражные возможности, не может быть рынком, в котором существует экономическое равновесие.

Цель данного подраздела состоит в том, чтобы получить два условия, которые эквивалентны утверждению, что не имеется никаких арбитражных возможностей. Начнем с определения *системы цен* (*price system*) для случайных исков как отображения π: $\mathbf{X} \to [0, \infty)$, удовлетворяющего следующим соотношениям:

$$\pi(X) = 0, \text{ если и только если } X = 0,$$

$$\pi(aX + bX') = a\pi(X) + b\pi(X') \text{ для всех } a, b \geq 0 \text{ и всех } X, X' \in \mathbf{X}. \quad (4.20)$$

Такая система цен называется *совместимой* (*consistent*) с рыночной моделью, если $\pi(V_T(\varphi)) = V_0(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathbf{\Phi}$. Пусть $\mathbf{\Pi}$ обозначает множество всех систем цен, совместимых с моделью.

Пусть $\mathbf{P}$ будет множеством всех вероятностных мер Q, которые эквивалентны мере P и такие, что дисконтированный процесс цен βS является (векторным) мартингалом при Q. Соотношение между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{\Pi}$ устанавливается в следующем утверждении (где E_Q – оператор математического ожидания при $Q \in \mathbf{P}$).

Утверждение 4.1. Между системами цен $\pi \in \mathbf{\Pi}$ и вероятностной мерой $Q \in \mathbf{P}$ имеется взаимно однозначное соответствие, выражаемое соотношениями:

а) $\pi(X) = E_Q(\beta_T X)$

б) $Q(A) = \pi(S_T^0 \mathbf{1}_A)$, $A \in F$.

Доказательство. Пусть $Q \in \mathbf{P}$. Определим π равенством а). Ясно, что π является системой цен. Чтобы показать, что она совместима с рыночной моделью, предположим, что стратегия $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ произвольная, и заметим с помощью соотношения (4.19), что

$$\beta_T V_T(\varphi) = \beta_T \varphi_T S_T + \sum_{i=1}^{T-1} (\varphi_i - \varphi_{i+1}) \beta_i S_i = \sum_{i=2}^{T} \varphi_i (\beta_i S_i - \beta_{i-1} S_{i-1}) + \beta_1 \varphi_1 S_1.$$

Следовательно,

$$\pi(V_T(\varphi)) = E_Q(\beta_T V_T(\varphi)) = E_Q\left(\sum_{i=2}^{T} \varphi_i (\beta_i S_i - \beta_{i-1} S_{i-1})\right) + E_Q(\beta_1 \varphi_1 S_1).$$

Поскольку βS – мартингал при Q и стратегия φ предсказуема, то первое слагаемое правой части равняется нулю. Для второго слагаемого вычисляем $E_Q(\beta_1 \varphi_1 S_1) = \varphi_1 E_Q(\beta_1 S_1) = \varphi_1 \beta_0 S_0 = V_0(\varphi)$, подтверждая, что π – совместимая и поэтому является элементом $\mathbf{\Pi}$.

Обратно, пусть $\pi \in \mathbf{\Pi}$, а Q определяется с помощью равенства б). Для каждого $\omega \in \Omega$ имеем $Q(\omega) = \pi(S_T^0 \mathbf{1}_\omega) > 0$, так как $S_T^0 \mathbf{1}_\omega \neq 0$ и π удовлетворяет (4.20). Теперь рассмотрим стратегию $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ с $\varphi^0 = 1$ и $\varphi^k = 0$ для $k = 1,\ldots, K$ (т. е. владение одной облигацией в течение всего времени). Так как цена π совместима с моделью, имеем равенства $V_0(\varphi) = \pi(V_T(\varphi))$, или $1 = \pi(S_T^0 \mathbf{1}_\Omega)$, или $Q(\Omega) = 1$. Таким образом, Q является вероятностной мерой, эквивалентной исходной мере P, и из соотношений (4.20) непосредственно следует, что $\pi(X) = E_Q(\beta_T X)$ для всех $X \in \mathbf{X}$. Далее пусть $k \geq 1$ будет произвольным числом, пусть также $\tau \leq T$ будет моментом остановки (*stopping time*), и рассмотрим стратегию $\varphi \in \mathbf{\Phi}$, определяемую равенствами

$$\varphi_t^k = \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}}, \quad \varphi_t^0 = (S_\tau^k / S_\tau^0)\, \mathbf{1}_{\{t > \tau\}},$$

и $\varphi^i = 0$ для всех других i. Это стратегия, которая соответствует тому, что инвестор владеет одной акцией типа k вплоть до момента остановки, затем продает эту акцию и вкладывает все доходы в облигации (можно проверить, что φ предсказуема). Тогда справедливы равенства $V_0(\varphi) = S_0^k$ и $V_T(\varphi) = (S_\tau^k / S_\tau^0)\, S_T^0 = S_T^0 \beta_\tau S_\tau^k$, и совместимость π дает нам

$$S_0^k = \pi(S_T^0 \beta_\tau S_0^k) = E_Q(S_T^0 \beta_\tau S_\tau^k) = E_Q(\beta_\tau S_\tau^k).$$

Так как k и τ произвольны, значит βS является векторным мартингалом при Q и, следовательно, Q – элемент $\mathbf{P}$.

Теперь вернемся к понятию арбитражных возможностей и сформулируем основной результат этого подраздела.

Теорема 4.1. Рыночная модель не содержит арбитражных возможностей, если и только если **P** (или эквивалентно **П**) не пусто.

В дальнейшем будем говорить, что модель *жизнеспособна* (*viable*), если справедливы все три эквивалентных условия теоремы 4.1: рыночная модель не содержит никаких арбитражных возможностей; **P** не пусто; **П** не пусто.

Следствие 4.1. Если модель жизнеспособна, то имеется единственная цена π, ассоциированная с любым достижимым зависимым иском X, и она удовлетворяет равенству $\pi = E_Q(\beta_T X)$ для каждой $Q \in$ **P**. Это решает задачу единственности, поставленную в конце § 2, и также показывает, что знание любой $Q \in$ **P** позволяет вычислять (по крайней мере, в принципе) цены всех достижимых исков.

Доказательство. Предположим, что **P** не пустое. Согласно утверждению 4.1, это эквивалентно непустому **П**. Зафиксируем $\pi \in$ **П**, и пусть стратегия $\varphi \in \Phi$ будет такой, чтобы $V_0(\varphi) = 0$. Тогда будем иметь $\pi(V_T(\varphi)) = V_0(\varphi) = 0$, потому что π совместима с моделью и, следовательно, $V_T(\varphi) = 0$ согласно соотношениям (4.20). Таким образом, никакие арбитражные возможности не существуют. Чтобы доказать обратное, необходим следующий вспомогательный результат, поскольку мы потребовали, чтобы допустимые стратегии имели положительные процессы стоимости.

Лемма 4.1. Если существует самофинансируемая стратегия φ (не обязательно допустимая) с $V_0(\varphi) = 0$, $V_T(\varphi) \geq 0$ и $E(V_T(\varphi) = 0) > 0$, то арбитражные возможности существуют.

Доказательство. Если $V(\varphi) \geq 0$, то φ является допустимой и, следовательно, сама является арбитражной возможностью, так что утверждение в этом случае справедливо. Если $V(\varphi) < 0$, тогда должны существовать такие $t < T$, $A \in F_t$ и $a < 0$, что $\varphi_t S_t = a$ на A и $\varphi_u S_u \leq 0$ на A для всех $u > t$. Определим новую торговую стратегию ψ равенствами $\psi_u = 0$ для $u \leq t$, $\psi_u(\omega) = 0$, если $u > t$ и $\omega \notin A$, и

$$\psi_u^k(\omega) = \begin{cases} \varphi_u^0(\omega) - a/S_t^0(\omega) & \text{для} \quad k = 0, \\ \varphi_u^k(\omega) & \text{для} \quad k = 1,2,\ldots,K, \end{cases}$$

если $u > t$ и $\omega \in A$.

Ясно, что ψ предсказуема. Для $\omega \in A$ имеем

$$\psi_{t+1} S_t = \left(\varphi_{t+1}^0 - a\big/ S_t^0\right) S_t^0 + \sum_{k=1}^{K} \varphi_{t+1}^k S_t^k = \varphi_t S_t - a = 0$$

из свойства (4.19) и определения a, поэтому ψ является самофинансирующей. Для $u > t$ и $\omega \in A$ имеем

$$\psi_u S_u = \left(\varphi_u^0 - a\big/ S_t^0\right) S_u^0 + \sum_{k=1}^{K} \varphi_u^k S_u^k = \varphi_u S_u - a\left(S_u^0 \big/ S_t^0\right) \geq 0,$$

так что $V(\psi) \geq 0$ и $\psi \in \Phi$. Но $S_T^0 > 0$ влечет, что $V_T(\psi) > 0$ на A, поэтому ψ является арбитражной возможностью. Это завершает доказательство леммы.

Вернемся к доказательству теоремы 4.1. Введем подпространство $\mathbf{X}^+ = \{X \in \mathbf{X}: E(\mathbf{X}) \geq 1\}$. Пусть $\mathbf{X^0}$ будет множеством всех случайных величин X на множестве Ω таких, что $X = V_T(\varphi)$ для некоторой самофинансирующей стратегии (не обязательно допустимой) с $V_0(\varphi) = 0$. Предположим, что никакие арбитражные возможности не существуют. Тогда непосредственно из леммы 4.1 следует, что $\mathbf{X^0}$ и $\mathbf{X}^+$ являются непересекающимися (напомним, что $\mathbf{X}$ содержит только положительные случайные величины). Далее, $\mathbf{X}^+$ является замкнутым и выпуклым подмножеством $\mathbf{R}^\Omega$, в то время как $\mathbf{X^0}$ – линейное подпространство. При этом по теореме об отделимости гиперплоскости существует линейный функционал L на $\mathbf{R}^\Omega$ такой, что $L(X) = 0$ для всех $X \in \mathbf{X^0}$, и $L(X) > 0$ для всех $X \in \mathbf{X}^+$. Из последнего свойства (и линейности) имеем $L(\mathbf{1}_\omega) > 0$ для всех $\omega \in \Omega$. Вводя нормировку, примем $\pi(X) = L(X)/L(S_T^0)$. Отсюда сразу видно, что π удовлетворяет соотношениям (4.20), поэтому она будет системой цен. Чтобы убедиться, что она является системой, совместимой с моделью ($\pi \in \mathbf{\Pi}$), выберем $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ и определим

$$\psi_t^k = \begin{cases} \varphi_t^0 - V_0(\varphi) & \text{для} \quad k = 0, \\ \varphi_t^k & \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, K. \end{cases}$$

Тогда ψ – самофинансирующая стратегия (не обязательно допустимая) с $V_0(\psi) = 0$ и $V_T(\psi) = V_T(\varphi) - V_0(\varphi) S_T^0$. Так как $V_T(\psi) \in \mathbf{X^0}$,

$\pi(X) = 0$ для всех $X \in \mathbf{X^0}$, π является линейной и $\pi\,(S_T^0) = 1$ вследствие нормировки, то

$$0 = \pi(V_T(\psi)) = \pi(V_T(\varphi) - V_0(\varphi)\, S_T^0) =$$

$$= \pi(V_T(\varphi)) - V_0(\varphi)\, \pi(S_T^0) = \pi(V_T(\varphi)) - V_0(\varphi).$$

Значит, $\pi(V_T(\varphi)) = V_0(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathbf{\Phi}$, откуда $\pi \in \mathbf{\Pi}$. Поэтому отсутствие арбитражных возможностей влечет непустое $\mathbf{\Pi}$, следовательно, по утверждению 4.1 $\mathbf{P}$ также непустое и теорема доказана.

В заключение этого доказательства и особенно леммы 4.1 уместно отметить следующее. Предположим, мы определили допустимость самофинансирующих стратегий в соответствии с более слабым ограничением $V_T(\varphi) \geq 0$, означающим, что богатство инвестора может быть отрицательным в моменты времени $t < T$ при стратегии φ, но он должен быть способным выплатить все долги в конце рассматриваемого периода. При определении арбитражных возможностей в терминах допустимых стратегий так же как и прежде теорема 4.1 все еще будет справедливой, и поэтому находим, что $V(\varphi) \geq 0$ для всех допустимых стратегий φ в жизнеспособной модели. Таким образом, более слабое определение допустимости эквивалентно более сильному определению, если в конечном счете ограничиться жизнеспособными моделями (что мы и будем делать).

Из трех эквивалентных условий, определяющих жизнеспособность, наименее абстрактным и наиболее значительным в экономическом смысле является отсутствие арбитражных возможностей. Согласно другому подходу, это условие оправдывает использование термина «жизнеспособный». Наконец, третье эквивалентное условие – существование мартингальной меры $Q \in \mathbf{P}$, что обычно легче всего проверить на примерах.

Достижимые иски

Для достижимого иска X ассоциированная рыночная цена π удовлетворяет равенству $\pi = E_Q(\beta_T X)$ для всех $Q \in \mathbf{P}$. Но как проверить заданный иск X на достижимость? Сначала получим некоторые предварительные результаты.

Утверждение 4.2. Если $\varphi \in \mathbf{\Phi}$, то процесс дисконтированной стоимости $\beta V(\varphi)$ – мартингал при каждой мере $Q \in \mathbf{P}$.

Доказательство. Так как φ самофинансирующая, легко проверить, что $\Delta(\beta V(\varphi))_t = \sum_{k=1}^{K} \varphi_t^k \Delta(\beta S^k)_t$ (см. доказательство утверждения 4.1). Тогда утверждение 4.2 следует из предсказуемости φ и того факта, что βS является (по определению) мартингалом при каждой $Q \in \mathbf{P}$.

Утверждение 4.3. Если $X \in \mathbf{X}$ достижим, то

$$\beta_t V_t(\varphi) = E_Q(\beta_T X \mid F_t), \qquad t = 0, 1, ..., T,$$

для любой $\varphi \in \mathbf{\Phi}$, которая порождает X, и всякой $Q \in \mathbf{P}$.

Доказательство. Достаточно заметить, что $V_T(\varphi) = X$ для любой φ, которая порождает X, и затем использовать утверждение 4.2.

Непосредственное применение утверждения 4.3 заключается в следующем. Если зависимый иск X достижим, тогда для процесса стоимости $V = V(\varphi)$ с любой $\varphi \in \mathbf{\Phi}$, которая порождает X, должно быть справедливым равенство

$$V_t = (1/\beta_t)\, E_Q(\beta_T X \mid F_t), \; t = 0, 1, ..., T, \tag{4.21}$$

где $Q \in \mathbf{P}$ – произвольная.

Кроме того, если V вычисляется через X по формуле (4.21) и если $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ порождает X, тогда

$$\Delta(\beta V(\varphi))_t = \sum_{k=1}^{K} \varphi_t^k \Delta(\beta S^k)_t, \; t = 0, 1, ..., T, \tag{4.22}$$

что легко проверить. Обратим внимание, что составляющая $k = 0$ облигации не входит в равенство (4.22). Наконец, можно также доказать обратное утверждение. Зависимый иск X достижим, если и только если существуют предсказуемые процессы $\varphi^1,\ldots, \varphi^K$ такие, что равенство (4.22) выполняется, как мы покажем в более общей постановке § 3. Проверка (или опровержение) равенства (4.22) может быть сделана путем отдельного вычисления для каждой ячейки разбиения P_{t-1}, и каждого $t = 1,\ldots, T$. Поскольку это описание является полностью определенным в конечной постановке, мы не будем продолжать его, но имеется один важный качественный момент для понимания процедуры. Смысл заключается в том, что V вычисляется по формуле (4.21) и любой $Q \in \mathbf{P}$, хотя мы еще не знаем, действительно ли X достижим. Тогда вопрос достижимости сводится к описанной задаче представления.

Полные рынки

Модель рынка ЦБ называется *полной* (*complete*), если каждый зависимый иск достижим. В § 3 будет показано, что в общей модели полнота эквивалентна определенному свойству мартингального представления. Здесь мы попытаемся найти более точную характеризацию полноты, которая является полностью определенной в конечном случае. Чтобы устранить тривиальные усложнения, сначала примем предположение невырожденности. Напомним, что P_t является разбиением множества Ω на основе F_t. Процесс цен S называется содержащим *избыточность* (*redundancy*), если $\mathbf{P}\,(\alpha\, S_{t+1} = 0 \mid A) = 1$ для некоторого нетривиального вектора α, некоторых $t < T$ и $A \in P_t$. Если такая избыточность существует, то имеется возможное событие A во время t, которое делает обладание некоторой одной ЦБ в течение предстоящего периода полностью эквивалентным владению линейной комбинацией других ЦБ в течение того же периода. Если никаких таких обстоятельств не существует, мы говорим, что ЦБ *неизбыточны* (*unredundant*).

Для каждой ячейки A из P_t ($t = 0, 1,\ldots, T - 1$) пусть $K_t\,(A)$ будет числом ячеек P_{t+1}, которые содержатся в A. Такое число называется индексом разбиения (*splitting index*) A. Принимая, что ЦБ являются неизбыточными и (как всегда) что модель жизнеспособна, $K_t(A) \geq K + 1$ (полное количество ЦБ) для всех t и A. (Этот факт может быть неочевидным и трудно доказуемым.)

Утверждение 4.4. Предположим, что ценные бумаги неизбыточны. Тогда модель будет полной, если и только если $K_t\,(A) \geq K + 1$ для всех $A \in P_t$ и $t = 0, 1,\ldots, T - 1$.

Точное доказательство этого утверждения в более общей форме без предположения неизбыточности здесь опускаем, дадим лишь его схему. Сначала рассмотрим случай единственного периода $T = 1$. Если Ω имеет n элементов, тогда пространство $\mathbf{X}$ зависимых исков является только положительным квадрантом $\mathbf{R}^n$, и при $T = 1$ каждая ценная бумага k состоит из константы S_0^k и вектора $S_1^k \in \mathbf{R}^n$, чьи компоненты определяют $S_1^k(\omega)$ для различных $\omega \in \Omega$. Для полноты необходимо, чтобы каждый $X \in \mathbf{X}$ был представим как линейная комбинация S_1^0, $S_1^1,\ldots, S_1^k$. В неизбыточном случае (когда S_1^0, $S_1^1,\ldots, S_1^k$ линейно независимы) требование полноты сводится к строгому требованию, чтобы

$n = K + 1$. Это рассуждение может быть затем расширено по индукции, чтобы доказать утверждение 4.4 для любого T.

Таким образом, полнота является вопросом размерности. Утверждение 4.4 говорит о том, что в каждом состоянии A, которое может преобладать во время t, инвесторы должны иметь достаточное количество доступных линейно независимых ЦБ, чтобы охватить множество непредвиденных состояний, которые могут преобладать во время $t + 1$. Для модели со многими датами торговли t и многими состояниями ω полнота существенно зависит от самих способов задания неопределенности в течение времени, что отражается индексами разбиения $K_t(A)$.

При непрерывной торговле никакая характеризация полноты, даже отдаленно подобной утверждению 4.4, не известна, но вторая характеризация полноты для конечного случая имеет известный общий аналог. В гл. 3 отмечалось, что конечная модель полная, если и только если **P** является множеством из одного элемента. Аналогичный результат, как известно, имеет место в более общей постановке (см. § 3).

Модель случайного блуждания

В качестве конкретного примера рассмотрим конечную модель с $S_t^0 = (1 + r)^t$, $S_0^1 = ... = S_0^K = 1$ и

$$S_t^k = \prod_{s=1}^{t} (1 + a^k \chi_s^k) \quad \text{для } t = 1, \ldots, T \text{ и } k = 1, \ldots, K,$$

где $\{\chi_t^1\}, \ldots, \{\chi_t^K\}$ – независимые последовательности независимых, одинаково распределенных двоичных случайных величин, принимающих значения ± 1 с равной вероятностью; $r, a^1, \ldots, a^K$ – константы, удовлетворяющие неравенствам $0 < r < a^k < 1$. Тогда процессы цен акций являются независимыми геометрическими случайными блужданиями, в то время как нулевая ЦБ – безрисковой облигацией, выплачивающей процентную ставку r в каждом периоде. При определении мартингальной меры $Q \in$ **P** никаких сложных проблем для этой модели не возникает (имеется много таких Q, если $K > 1$, но только одна, если $K = 1$). Принимая в качестве **F** фильтрацию, индуцируемую самим процессом цен S, получаем $K_t(A) = 2^K$ для всех A и t. Легко проверить, что эти ЦБ являются неизбыточными, так что по утверждению 4.4 эта модель случайного блуждания полная, если и только если $K = 1$.

§ 3. НЕПРЕРЫВНАЯ ТОРГОВЛЯ

В этом параграфе представлена общая модель невязкого рынка ЦБ, где инвесторам разрешается торговать непрерывно до некоторого установленного планового временного горизонта T. Теория близка к той, которая развита в § 2, поэтому изложение будет кратким с объяснением проблем, не имеющих аналогий в конечной постановке.

Снова начнем с вероятностного пространства (Ω, F, P) и фильтрации (увеличивающимся семейством подалгебр) $\mathbf{F} = \{F_t;\ 0 \le t \le T\}$, удовлетворяющей обычным условиям:

F_0 содержит все пустые множества P,

$\mathbf{F}$ непрерывна справа, т. е. $F_t = \bigcap\limits_{s>t} F_s$ для $0 < t < T$.

Фактически без существенной потери общности будет принято, что F_0 содержит только Ω и пустые множества P и что $F_T = F$. Наконец заметим, что P не играет никакой роли в нашей теории, кроме определения пустых множеств. В дальнейшем мы будем говорить только о фильтрованном вероятностном пространстве (*filtered probability space*) $(\Omega, \mathbf{F}, P)$.

Пусть $S = \{S_t;\ 0 \le t \le T\}$ будет векторным процессом, чьи компоненты $S^0, S^1, \ldots, S^K$ адаптированы (т. е. $S_t^k \in F_t$ для $0 \le t \le T$), непрерывны справа, имеют пределы слева (в дальнейшем сокращенно НППЛ) и строго положительны. Результаты будут справедливы для неотрицательных цен, но для упрощения доказательств мы примем их строго положительными.

Предположим, что составляющая S^0 имеет конечную вариацию и непрерывна, интерпретируя это как то, что нулевая ЦБ, называемая *облигацией* (*bond*), является локально безрисковой (*locally riskless*). В качестве удобной нормировки примем, что всегда $S_0^0 = 1$. Если бы S^0 была абсолютно непрерывной, то мы могли бы написать

$$S_t^0 = \exp\left(\int_0^t \gamma_s\, ds\right),\ 0 \le t \le T,$$

для некоторого процесса γ, и тогда процесс γ_t интерпретировался бы как безрисковая процентная ставка в момент времени t. Однако абсолютная непрерывность не дает существенного упрощения каких-либо аспектов теории, так что мы этого не предполагаем, а определим

$$\alpha_t = \ln (S_t^0),\ \ 0 \le t \le T,$$

и назовем α процессом доходности (*return process*) для S^0, или *локально безрисковым процессом доходности* (*locally riskless return process*). Также введем

$$\beta_t = 1 / S_t^0 = \exp (-\alpha_t), \quad 0 \le t \le T,$$

называя β *внутренним процессом дисконтирования* (*intrinsic discount process*) для S.

Мартингалы и стохастические интегралы

Рассмотрим некоторые аспекты теории мартингалов. Супермартингал (*supermaitingale*) – это адаптированный НППЛ процесс $X = \{X_t;\ 0 \le t \le T\}$ такой, что процесс X_t является интегрируемым и $E(X_t \mid F_t) \le X_s$ для $0 \le s < t \le T$. Процесс X называют мартингалом (*martingale*), если как X, так и $-X$ – супермартингалы. Все наши мартингалы равномерно интегрируемы, потому что они остановлены в момент времени $T < \infty$. Это следует учитывать, сравнивая наши определения с теми, которые имеются в литературе. Позже используем тот факт, что

положительный процесс X является мартингалом, если и только если он является супермартингалом и $E(X_T) = X_0$. (4.23)

Адаптированный НППЛ процесс M называют *локальным мартингалом* (*local martingale*), если существует возрастающая последовательность моментов остановки $\{T_n\}$ такая, что

$$P\{T_n = \mathrm{T}\} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{4.24}$$

и

остановленный процесс (*stopped process*) $\{M(t \wedge T_n);\ 0 \le t \le T\}$ является мартингалом для каждого n. (4.25)

При этом говорят, что последовательность $\{T_n\}$ *сходится* к M. Чтобы показать свойство (4.25), запишем параметр времени процесса как функциональный аргумент (а не нижний индекс), если необходимо избежать двусмысленности обозначений.

Ясно, что каждый мартингал является локальным мартингалом, и из леммы Фату немедленно следует, что

всякий положительный локальный мартингал
является также супермартингалом. (4.26)

Объединяя утверждения (4.26) и (4.23), мы видим, что

положительный локальный мартингал M является также
супермартингалом, если и только если $E(M_T) = M_0$. (4.27)

Говорят, что процесс $A = \{A_t;\ 0 \le t \le T\}$ находится в классе VF (конечной вариации, *finite variation*), или просто VF-процесс, если он является адаптированным НППЛ и имеет выборочные траектории конечной вариации. Процесс X называется *полумартингалом* (*semi-martingale*), если он допускает декомпозицию $X = M + A$, где M – локальный мартингал, а A – VF-процесс. Эта *каноническая декомпозиция* (*canonical decomposition*) в общем случае не единственная.

Мы говорим, что $H = \{H_t;\ 0 \le t \le T\}$ – *простой предсказуемый процесс* (*simple predictable process*), если существуют моменты времени $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ и ограниченные случайные величины $\xi_0 \in F_0,\ \ \xi_1 \in F_{t_1}, \ldots, \xi_{n-1} \in F_{t_{n-1}}$ такие, что

$$H_t = \xi_i, \text{ если } t_i < t \le t_{i+1} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Таким образом, простые предсказуемые процессы являются ограниченными, адаптированными, непрерывными слева и кусочно постоянными. Предсказуемая σ-алгебра (*predictable σ-algebra*) определяется как порожденная на $\Omega \times [0, T]$ простыми предсказуемыми процессами (в литературе имеет место разнообразие эквивалентных определений). Процесс $H = \{H_t;\ 0 \le t \le T\}$ называется *предсказуемым* (*predictable*), если он измерим относительно предсказуемой σ-алгебры. Каждый предсказуемый процесс является адаптированным.

Процесс H *локально ограничен* (*local bounded*), если существуют константы $\{C_n\}$ и моменты остановки $\{T_n\}$, удовлетворяющие соотношению (4.24), такие, что

$$|H_t| \le C_n \quad \text{для} \quad 0 \le t \le T_n \quad \text{и} \quad n = 1, 2, \dots. \qquad (4.28)$$

Иногда при рассмотрении стохастических интегралов Лебега локальную ограниченность определяют путем более слабого требования

$$\sup_{0 \le t \le T} |H_t| < \infty, \qquad (4.29)$$

но несоответствие определений разрешается (для наших целей) следующим результатом: условия (4.28) и (4.29) эквивалентны для предсказуемых процессов.

Также известно, что

адаптированный процесс, который является непрерывным слева и имеет пределы справа (НППЛ) является как предсказуемым, так и локально ограниченным. (4.30)

Теперь рассмотрим полумартингал X вместе с простым предсказуемым процессом H, удовлетворяющим условию (4.28). Тогда стохастический интеграл $Z = \int H dX$ определяется потраекторно (*path-by-path*) в смысле Лебега – Стильтьеса, т. е. (напомним, что H непрерывен слева, в то время как X непрерывен справа) $Z_0 = 0$ и

$$Z_t = \sum_{j=0}^{i-1} \xi_j (X_{t_{j+1}} - X_{t_j}) + \xi_i (X_t - X_{t_i}), \quad \text{если } t_i < t \le t_{i+1}.$$

Далее, если H является общим локально ограниченным и предсказуемым процессом, то стохастический интеграл $Z = \int H dX$ может быть определен путем непрерывного расширения того, что мы имеем для простых предсказуемых процессов. Кстати, когда мы пишем $Z = \int H dX$, то подразумеваем, что $Z_0 = 0$ и

$$Z_t = \int_0^t H_s dX_s = \int_{(0,t]} H_s dX_s, \quad 0 < t \le T.$$

Заметим, что предсказуемость и локальная ограниченность сохраняются при подстановке эквивалентной меры, и полумартингальное свойство также инвариантно к таким заменам. Наконец, стохастический интеграл $Z = \int HdX$, описанный выше, обладает такой же инвариантностью. Тот факт, что все эти определения зависят только от пустых множеств исходной вероятностной меры, имеет важное значение в нашей постановке.

Определение стохастических интегралов в терминах предсказуемых интегрируемых функций является как раз тем, что необходимо для экономического моделирования, и это дает следующий ключевой результат:

Если H локально ограничен и предсказуем, а M – локальный мартингал, тогда $\int HdM$ является также локальным мартингалом. (4.31)

Если далее предположить, что M – мартингал, тогда может оказаться неверным, что $\int HdM$ является мартингалом (имеются известные контр-примеры в теории Ито, когда M – броуновское движение). Нельзя также строго утверждать, что свойство (4.31) имеет место только тогда, когда внимание ограничивается предсказуемыми интегралами H.

Если Z – стохастический интеграл $\int HdX$, как определено выше, то Z сам является полумартингалом (следовательно, НППЛ) таким, что

$$\Delta Z_t = H_t \Delta X_t, \quad 0 \le t \le T,$$

где стандартное обозначение $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-}$ используем для скачка Z в момент времени t. Мы будем писать ΔZ и Z_-, чтобы обозначать соответственно процессы $\{\Delta Z_t;\ 0 \le t \le T\}$ и $\{Z_{t-};\ 0 \le t \le T\}$. Кстати, определение общего стохастического интеграла $\int HdX$ согласуется с интегралом Ито, если X является броуновским движением (хотя мы ограничиваемся более узким классом интегрируемых функций, чем общепринято в развитии теории Ито) и совпадает с потраекторным интегралом Лебега – Стильтьеса, когда X является VF-процессом.

Пусть X и Y – полумартингалы. Так как X_- и Y_- являются НППЛ и адаптированными, свойство (4.30) показывает, что имеет смысл определить новый процесс $[X; Y]$:

$$[X; Y]_t = X_t Y_t - \int_0^t X_{s-} dY_s - \int_0^t Y_{s-} dX_s, \quad 0 \le t \le T. \tag{4.32}$$

Эквивалентным определением этого процесса является следующее. Пусть $t_i^n = it/2^n$ для $n = 1, 2,...$ и $i = 0, 1,..., 2^n$. Тогда

$$[X; Y]_t = X_0 Y_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_i (X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))(Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n)),$$

где сходимость предполагается по вероятности. Это последнее определение объясняет, почему $[X, Y]$ называется *совместной вариацией* (*joint variation*) X и Y, а $[X, X]$ – *квадратичной вариацией* (*quadratic variation*) X. Тогда получаем еще одно определение, которое инвариантно при переходе к эквивалентной вероятностной мере.

Имеется еще несколько свойств совместной вариации, которые будут использоваться позже. Во-первых, $[X, Y]$ всегда является VF-процессом, и кроме того

$$[X, Y] = \sum_{s \le t} \Delta X_s \Delta Y_s, \text{ если или } X, \text{ или } Y \text{ является VF-процессом.} \tag{4.33}$$

В частности, если процесс X непрерывен и VF, тогда равенство (4.33) дает $[X, Y] = 0$ для любого полумартингала Y. Наконец, из равенства (4.32) и конечной вариации $[X, Y]$ немедленно следует, что

произведение двух полумартингалов
само является полумартингалом. (4.34)

Процесс X называется *интегрируемым* (по мере P), если $E(|X_t|) < \infty$, $0 \le t \le T$. Он называется *локально* интегрируемым, если существуют моменты остановки $\{T_n\}$, удовлетворяющие условию (4.24), такие, что процесс $\{X(t \wedge T_n); 0 < t \le T\}$ интегрируем для каждого n.

Предварительная рыночная модель

Используя понятие, которое мы упоминали в начале параграфа, будет удобно определить *процесс дисконтированных цен* (*discounted price process*) $Z = (Z^1, ..., Z^K)$ соотношением

$$Z_t^k = \beta_t S_t^k, \quad 0 \le t \le T \text{ и } k = 1,..., K.$$

Обратим внимание, что Z имеет только K компонент. Пусть **P** будет множеством вероятностных мер Q на (Ω, F), которые эквивалентны P и такие, что Z является (векторным) мартингалом при Q. Это, конечно, то же, что и требование, чтобы βS был мартингалом при Q, так как $\beta S^0 = 1$ является мартингалом при любой мере, эквивалентной P. Элементы **P** называются *мартингальными мерами* (*martingale measure*). В дальнейшем будем считать выполненным следующее предположение.

Предположение 4.1. Множество **P** не пусто.

Принятие предположения 4.1 в начале анализа составляет главное различие в исследовании конечного и непрерывного случаев. Весь § 2, основным результатом которого является теорема 4.1, был посвящен доказательству того, что в конечной постановке предположение 4.1 эквивалентно отсутствию арбитражных возможностей. Это экономически приемлемое предположение. Для непрерывного случая можно фактически доказать общую версию теоремы 4.1, но надлежащее определение арбитражных возможностей и последующего математического анализа чрезвычайно сложно. Надлежащее исследование жизнеспособности непрерывных моделей было сделано в гл. 3, поэтому здесь мы полагаемся только на формальную аналогию с конечной теорией, имея в виду, что детали жизнеспособности в общей постановке содержатся в гл. 3.

Мы имеем, что S^0 является VF-процессом (и, таким образом, полумартингалом), что Z^k – мартингал при любой $Q \in$ **P** и что $S^k = Z^k/\beta = S^0 Z^k$. Тогда из свойства (4.34) следует, что S^k будет полумартингалом при Q, и, следовательно, также при P (напомним, что полумартингальное свойство является инвариантом при замене на эквивалентную меру). Следовательно, S – векторный полумартингал.

Чтобы проверить предположение 4.1 и затем вычислить цены достижимых зависимых исков (см. ниже), необходимо определить по крайней мере одну мартингальную меру $Q \in$ **P**. Это будет сделано позже для некоторых конкретных примеров, но следует также отметить, что существует хорошо развитая общая теория по изменению меры для полумартингалов. Общая форма теоремы Гирсанова показывает, что для нахождения $Q \in$ **P** нужно найти строго положительный мартингал M, который переносит некоторые соотношения (включающие совместную вариацию) на процесс дисконтированных цен Z.

Торговую стратегию (*trading strategy*) определим как $(K + 1)$-мерный процесс $\varphi = \{\varphi_t\,;\, 0 \le t \le T\}$, чьи компоненты $\varphi^0, \varphi^1, \ldots, \varphi^K$ являются локально ограниченными и предсказуемыми (см. выше). С каждой такой стратегией φ мы связываем *процесс стоимости* (*value process*) $V(\varphi)$ и *процесс прибыли* (*gains process*) $G(\varphi)$

$$V_t(\varphi) = \varphi_t S_t = \sum_{k=0}^{K} \varphi_t^k S_t^k, \ 0 \le t \le T,$$

$$G_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_u dS_u = \sum_{k=0}^{K} \int_0^t \varphi_u^k dS_u^k, \ 0 \le t \le T.$$

Как и в конечной теории, мы интерпретируем $V_t(\varphi)$ как рыночную стоимость портфеля, а $G_t(\varphi)$ – как чистую прибыль капитала, реализованную согласно стратегии φ в течение времени t. Но почему торговые стратегии должны быть предсказуемыми и почему стохастический интеграл дает правильное определение прибыли капитала? Продолжая нашу практику погружения в основополагающие проблемы, немного скажем об этом важном предмете. Очевидно, что простые предсказуемые стратегии (см. выше) должны быть допустимыми, и что $G(.)$ дает правильное понятие прибыли капитала для таких стратегий. Фактически определение $G(\varphi)$ для простой предсказуемой φ, по существу, сводится к определению, которое использовалась ранее в конечной теории. Тогда окончательное обоснование нашей постановки должно опираться на тот факт, что каждая предсказуемая стратегия φ может быть аппроксимирована (в определенном смысле) последовательностью *простых* предсказуемых стратегий $\{\varphi_n\}$ такой, что $G(\varphi)$ = $\int \varphi dS$ является пределом (в определенном смысле) последовательности $\{G(\varphi_n) = \int \varphi_n dS\}$. Ограничением на предсказуемые стратегии служит описание того, что могут делать инвесторы в момент времени, соответствующий скачку процесса цен. Если S непрерывен, нет необходимости заботиться о предсказуемости вовсе: используя такое же форвардное (или неупреждающее) определение стохастического интеграла, можно было допустить все торговые стратегии, которые в некоторой мере произвольные адаптированные.

Мы говорим, что торговая стратегия *самофинансирующая*, если

$$V_t(\varphi) = V_0(\varphi) + G_t(\varphi), \quad 0 \le t \le T.$$

Так как стохастический интеграл $G(\varphi)$ – адаптированный и НППЛ, то и $V(\varphi)$ адаптирован и НППЛ для любой самофинансирующей φ. Далее, пусть **Φ** будет классом всех самофинансирующих стратегий φ таких, что $V(\varphi) \geq 0$. Он является точной непрерывной копией того, что мы имели как множество допустимых торговых стратегий в конечной теории. К сожалению, **Φ** не будет множеством допустимых стратегий в непрерывной теории. Вскоре обсудим проблемы с **Φ**, а необходимые модификации будут сделаны позже. Но сначала необходим один предварительный результат. Для любой торговой стратегии φ будем писать

$$G^*(\varphi) = \int \varphi\, dZ = \sum_{k=1}^{K} \int \varphi^k dZ^k,$$

с составляющей облигации φ^0, не играющей никакой роли. Мы также введем обозначение

$$V^*(\varphi) = \beta V(\varphi) = \varphi^0 + \sum_{k=1}^{K} \varphi^k Z^k.$$

Назовем $G^*(\varphi)$ и $V^*(\varphi)$ соответственно *дисконтированным процессом прибыли* (*discounted gains process*) и *дисконтированным процессом стоимости* (*discounted value process*) для стратегии φ.

Утверждение 4.5. Пусть φ будет некоторой торговой стратегией. Стратегия φ является самофинансирующей тогда и только тогда, когда $V^*(\varphi) = V_0^*(\varphi) + G^*(\varphi)$, и, конечно, $V(\varphi) \geq 0$, если и только если $V^*(\varphi) \geq 0$.

Таким образом, все наши существенные определения могут быть эквивалентно переписаны в терминах дисконтированных величин. Впредь будем использовать эти более удобные, но эквивалентные дисконтированные формулировки.

Следствие 4.2. Если $\varphi \in$ **Φ**, тогда $V^*(\varphi)$ является положительным локальным мартингалом и супермартингалом, относительно каждой $Q \in$ **P**.

Доказательство. Для утверждения 4.5 сначала предположим, что φ – самофинансирующая, полагая, что $V(\varphi) = V_0(\varphi) + G(\varphi)$. Тогда $\Delta V(\varphi) = \Delta G(\varphi) = \varphi \Delta S$ и, следовательно,

$$V_-(\varphi) = V(\varphi) - \Delta V(\varphi) = \varphi\, S - \varphi \Delta S = \varphi\, S_-.$$

Так как β – непрерывный VF-процесс, из свойства (4.33) вытекает, что $[\beta, V(\varphi)] = 0$, и тогда из определения (4.32) совместной вариации и непрерывности β имеем

$$dV^*(\varphi) = d(\beta V(\varphi)) = \beta_- \, dV(\varphi) + V_-(\varphi)\, d\beta = \beta dV(\varphi) + V_-(\varphi)\, d\beta =$$

$$= \beta dG(\varphi) + \varphi S_- \, d\beta = \beta\varphi dS + \varphi S_- \, d\beta = \varphi\,(\beta dS + S_- \, d\beta).$$

Но по аналогии с $dZ = d(\beta S) = \beta dS + S_- \, d\beta$ получаем $dV^*(\varphi) = \varphi dZ$, которое точно означает, что $V^*(\varphi) = V_0^*(\varphi) + \int \varphi dZ = V_0^*(\varphi) + G^*(\varphi)$, т. е. является требуемым заключением. Доказательство обратного фактически идентично, поэтому мы его опускаем. Следствие 4.2 непосредственно вытекает из свойств (4.26), (4.31) и того факта, что $V^*(\varphi) \geq 0$.

Напомним, что $G^*(\varphi)$ не зависит от составляющей облигации φ^0. Таким образом, утверждение 4.5 показывает, что самофинансирующая стратегия φ полностью определяется ее начальной стоимостью $V_0^*(\varphi)$ и ее компонентами акции. Конкретнее, любое множество локально ограниченных и предсказуемых процессов $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^K$ может быть единственным образом расширено до самофинансирующей стратегии φ с фиксированной начальной стоимостью $V_0^*(\varphi) = v$ путем определения

$$\varphi_t^0 = v + \sum_{k=1}^{K} \int_0^t \varphi_s^k dZ_s^k - \sum_{k=1}^{K} \varphi_t^k Z_t^k, \quad 0 \leq t \leq T,$$

единственной стратегии φ^0, дающей $V^*(\varphi) = v + G^*(\varphi)$. Очевидно, что $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ тогда и только тогда, когда $v + G^*(\varphi) \geq 0$.

Далее, что случится, если мы объявим все стратегии $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ допустимыми? Если определить арбитражную возможность как стратегию $\varphi \in \mathbf{\Phi}$, для которой $V_0(\varphi) = 0$, но $V_T(\varphi) > 0$ с положительной вероятностью, то из следствия 4.2 последует, что ни одна из них не существует. Поскольку стоимость $V^*(\varphi)$, как мы знаем, является положительным супермартингалом при любой $Q \in \mathbf{P}$, она должна оставаться нулевой, если она нулевая вначале, хотя не имеется никаких стратегий в $\mathbf{\Phi}$, которые превращают ничто в кое-что, но могут быть (и вообще есть) стратегии, которые превращают кое-что в ничто. В § 6 для модели Блэка – Шоулса приведем пример *стратегии банкротства по собственной вине* (*стратегии самоубийства*, *suicide strategy*) $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ такой, при которой $V_0(\varphi) = 1$, а $V_T(\varphi) = 0$. Если бы все стратегии

$\varphi \in \mathbf{\Phi}$ были допустимыми, цены достижимых зависимых исков в модели Блэка – Шоулса никогда не были бы единственными. Определив, что иск X является достижимым по цене π при использовании некоторой φ, мы всегда можем добавлять к φ стратегию самоубийства и таким образом достигать X по цене $\pi + 1$. (Достижимые требования и связанные с ними цены не были формально определены в этом разделе, но представляется, что смысл этих замечаний ясен из всего, что сказано ранее.) Первая проблема с $\mathbf{\Phi}$ состоит в том, чтобы оно содержало как можно больше стратегий, так как хотим, чтобы каждый достижимый иск имел единственную ассоциированную с ним цену. Поэтому используем эталонную меру $Q \in \mathbf{P}$ и ограничимся стратегиями φ, для которых $V^*(\varphi)$ является мартингалом, а не только локальным мартингалом при Q. Это, конечно, устранит вышеупомянутую стратегию самоубийства.

Хотя $\mathbf{\Phi}$ несколько шире в смысле, только что обсужденном, оно несколько уже в другом смысле. Грубо говоря, пространство локально ограниченных предсказуемых стратегий имеет своего рода недостаток свойства замыкания, которое нам нужно для получения явного результата по полноте. Если желать, чтобы все зависимые иски (или хотя бы ограниченные иски) были достижимыми, например, в модели Блэка – Шоулса, нужно допускать стратегии, которые не являются локально ограниченными. Теперь введем множество $\mathbf{\Phi}$ допустимых стратегий, которое подходит для наших целей.

Заключительная формулировка

Выберем и зафиксируем эквивалентную меру $Q \in \mathbf{P}$, обозначая через $E^*(.)$ соответствующий ей оператор математического ожидания. Впредь до дальнейшего уведомления, когда мы говорим о мартингалах и локальных мартингалах, лежащая в основе вероятностная мера понимается как Q. Определим $L(Z)$ как множество всех предсказуемых процессов $H = (H^1,\ldots, H^K)$ таких, что возрастающий процесс

$$\left(\int_0^t (H_s^k)^2 \, d[Z^k, Z^k]_s\right)^{1/2}, \quad 0 \le t \le T, \tag{4.35}$$

является локально интегрируемым (см. выше) при мере Q для каждого $k = 1,\ldots, K$. Можно проверить, что $L(Z)$ содержит все локально ограниченные и предсказуемые H, и, кроме того, $\int HdZ$ остается локальным мартингалом для этих интегрируемых функций.

Теперь расширим определение торговой стратегии, чтобы включить все предсказуемые стратегии $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2,\ldots, \varphi^K)$ такие, чтобы $(\varphi^1, \varphi^2,\ldots, \varphi^K) \in L(Z)$. Считаем, что $V^*(\varphi) = \beta\varphi S$, $G^*(\varphi) = \int\varphi dZ$ и, как было принято раньше, торговая стратегия называется *допустимой*, если $V^*(\varphi) \geq 0$, $V^*(\varphi) = V_0^*(\varphi) + G^*(\varphi)$ и

$$V^*(\varphi) \text{ является мартингалом (при } Q). \tag{4.36}$$

Пусть $\mathbf{\Phi}^*$ будет классом всех допустимых торговых стратегий. Условие (4.36) выглядит чрезвычайным, но подтверждение (или опровержение) этого не является проблемой, которая когда-либо возникает, если интересоваться только определением стоимости зависимого иска. Очевидно, что условие (4.36) эквивалентно требованию, чтобы $G^*(\varphi) = \int\varphi dZ$ был мартингалом, и по свойству (4.27) оно также эквивалентно простому условию

$$E^*[V_T^*(\varphi)] = V_0^*(\varphi). \tag{4.37}$$

Зависимый иск (*contingent claim*) формально определяется как положительная случайная величина X (напомним, что $F = F_T$ по соглашению). Такой иск называется *достижимым*, если существует стратегия $\varphi \in \mathbf{\Phi}^*$ такая, что $V^*_T(\varphi) = \beta_T X$. При этом говорят, что φ *порождает* X, и $\pi = V_0^*(\varphi)$ называется *ценой*, *ассоциированной с* X (*price associated with* X).

Утверждение 4.6. Единственной ценой π, ассоциированной с достижимым X, является $\pi = E^*[\beta_T X]$.

Это утверждение прямо следует из условия (4.37). В будущем будем говорить, что иск X *интегрируем*, если $E^*[\beta_T X] < \infty$, и аналогично термин *ограниченный* означает, что $\beta_T X$ ограничено. Из определения непосредственно следует, что только интегрируемые иски могут быть достижимыми. Теперь дадим более или менее конкретный тест на достижимость.

Утверждение 4.7. Пусть X будет интегрируемым зависимым иском и пусть V^* будет НППЛ модификацией

$$V_t^* = E^*[\beta_T X \mid F_t], \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Тогда X является достижимым, если и только если V^* может быть представлена в форме $V^* = V_0^* + \int HdZ$ для некоторого $H \in L(Z)$, при этом $V^*(\varphi) = V^*$ для любой $\varphi \in \mathbf{\Phi}^*$, которая порождает X.

Обратим внимание, что кандидат на процесс стоимости V^* вычисляется до того, как мы узнаем, что X действительно достижим.

Доказательство. Предположим, что X является достижимым, порожденным некоторой $\varphi \in \mathbf{\Phi}^*$. Пусть $H^k = \varphi^k$ для $k = 1,\ldots, K$ так чтобы $\int HdZ = G^*(\varphi)$. Так как $\beta_T X = V_T^*(\varphi)$ и $V^*(\varphi)$ является мартингалом (4.36), то

$$V_t^* = E^*[\beta_T X \mid F_t] = E^*[V^*_T(\varphi) \mid F_t] = V^*_t(\varphi).$$

Но $V_t^*(\varphi) = V_0^*(\varphi) + G_t^*(\varphi) = V_0^*(\varphi) + \int_0^t HdZ$, поскольку $\varphi \in \mathbf{\Phi}^*$, в результате мы имеем желаемое представление.

Обратно, пусть X будет интегрируемым иском, определим V^*, как обозначено выше, и предположим, что $V^* = V_0^* + \int HdZ$ для $H \in L(Z)$. Определим $\varphi^1 = H^1,\ldots,\ \varphi^K = H^K$ и φ^0, как было сделано выше, с $v = V_0^*$, получая торговую стратегию φ такую, что

$$V^*(\varphi) = V_0^*(\varphi) + G^*(\varphi) = V_0^* + \int HdZ = V^*.$$

Очевидно, что V^* – положительный мартингал по определению, поэтому φ – допустимая стратегия с $V_T^*(\varphi) = \beta_T X$, а X является достижимым и порождаемым стратегией φ.

Обратим внимание, что торговая стратегия, построенная во второй половине доказательства, начиная с интегрируемой функции H, появляющейся в представлении, автоматически удовлетворяет условию (4.36) по способу, которым мы сначала определили V^*.

Полные рынки (представление мартингалов)

Мы говорим, что рассмотренная рыночная модель является *полной* (*complete*), если каждый интегрируемый иск достижим. Перед продолжением анализа полных рынков установим, что это определение не изменится, если рассматривать также подлежащий оплате иск перед предельной датой T. Предположим, что мы определяем (в широком смысле) зависимый иск как пару (t, X) с $0 \le t \le T$ и $X \in F_t$, сделав очевидную интерпретацию. Мы говорим, что (t, X) достижим, если будет существовать $\varphi \in \mathbf{\Phi}^*$ такая, что $V_t^*(\varphi) = \beta_t X$. Определяя интегрируемость (t, X) в соответствии с требованием $E^*[\beta_t X] < \infty$, говорим, что модель (в широком смысле) полная, если каждый интегрируемый (в широком смысле) иск достижим. Предположим, что рыночная модель полная согласно нашему первоначальному определению, зафиксируем (t, X) и рассмотрим пару (T, X'), где $X' = \beta_t X S_T^0$. Очевидно, $E^*[\beta_T X'] = E^*[\beta_t X] < \infty$, так что X' – интегрируемый иск (подлежащий оплате в момент времени T). Пусть также $\varphi \in \mathbf{\Phi}^*$ будет стратегией, которая достигает X' (напомним, что мы принимали полноту в узком смысле), и знаем, что $V^*(\varphi)$ является мартингалом при Q с $V_T^*(\varphi) = \beta_T X'$. Таким образом,

$$V_t^* = E^*[V_T^*(\varphi) \mid F_t] = E^*[\beta_T X' \mid F_t] = E^*[\beta_t X \mid F_t] = \beta_t X,$$

поэтому φ также достигает (t, X), и мы заключаем, что полнота в широком смысле эквивалентна полноте в первоначальном, узком смысле.

Все обозначения и соглашения, установленные в § 2, остаются в силе. В частности, термин «мартингал» неявно относится к эквивалентной мере Q. Пусть $\mathbf{M}$ будет множеством всех мартингалов, и пусть $\mathbf{M}(Z)$ состоит из всех $M \in \mathbf{M}$, представимых в виде

$$M = M_0 + \int H dZ \text{ для некоторого } H \in L(Z).$$

Если $\mathbf{M} = \mathbf{M}(Z)$, то будем говорить, что Z обладает *свойством мартингального представления* (*martingale representation property*) для $(\Omega, \mathbf{F}, Q)$. Это определение, конечно, включает фильтрацию $\mathbf{F}$ фундаментальным образом. Грубо говоря, Z обеспечивает базис для пространства $\mathbf{M}$ или Z охватывает $\mathbf{M}$ со стохастическими интегралами, играющими роль линейных комбинаций.

Теорема 4.2. Модель полна, если и только если $\mathbf{M} = \mathbf{M}(Z)$.

Следствие 4.3. Если $\mathbf{P}$ является множеством из одного элемента (*singleton*), то модель полная.

Теорема 4.2 последует из утверждения 4.7, если использовать тот факт, что любой мартингал может быть выражен как разница двух положительных мартингалов. Следствие 4.3 проистекает из общей теории представления мартингалов. Конкретно оно выводится из того факта, что если Q является единственным элементом $\mathbf{P}$, тогда Q – экстремальная точка (*extreme point*) множества всех вероятностных мер, при которых Z является мартингалом. Используя общую теорию, следствие 4.3 можно фактически усилить, чтобы говорить, что модель полная, если и только если Q является экстремальной точкой некоторого множества. Строгое установление этого результата требует некоторых дополнительных, довольно абстрактных определений, поэтому далее мы не будем исследовать этот вопрос. Общие теоремы по представлению мартингалов имеют очевидную аналитическую привлекательность, и они обеспечивают потенциальные средства установления полноты любой заданной рыночной модели. Однако в непрерывной модели пока нет ничего сопоставимого с достаточно явной характеризацией полных конечных рынков, которая была дана в § 2. Этот результат подсказывает, что окончательная характеризация полных непрерывных рынков должна учитывать более тонкую структуру фильтрации $\mathbf{F}$.

Перейдем к конкретным задачам, предполагая, что $\mathbf{F} = \mathbf{F}^S$ – минимальная фильтрация (удовлетворяющая обычным условиям), относительно которой адаптирован процесс S. Это интерпретируется как тот факт, что инвесторы имеют доступ только к прошлой и настоящей информации о ценах (или, по крайней мере, обязаны базировать свои торговые решения исключительно на этой информации). Далее предположим, что S^0 (процесс цены облигации) детерминирован, в результате $\mathbf{F}^S = \mathbf{F}^Z$, поскольку $Z = \beta S$. В общей постановке полнота – это совместное свойство (Ω, $\mathbf{F}$, Q) и Z, но теперь Z фактически определяет фильтрацию, так что нет вообще никакой надобности использовать основное пространство. Таким образом, можно сказать, что *мартингал Z является полным* (*martingale Z is complete*), если всякий другой мартингал M по $\mathbf{F}^Z$ может быть представлен как $M = M^0 + \int HdZ$ с предсказуемым H.

Теперь обсудим мартингалы, о которых известно, что они являются полными, по крайней мере, не строго в смысле предыдущего абзаца. Определенно первый известный результат этого типа касается полноты одномерного броуновского движения (которое влечет, что каждый зависимый иск достижим в модели Блэка – Шоулса). Более общие типы диффузионных процессов, как известно, являются полными, как это можно вывести из результатов для самого броуновского движения. Пуассоновский мартингал $cN_t - c\lambda t$, где c – вещественная константа, а N – процесс Пуассона интенсивности λ, как известно, является полным. Этот результат был обобщен на произвольные точечные процессы. Наконец, известно, что винеровский и пуассоновский мартингалы – единственные полные одномерные мартингалы со стационарными независимыми приращениями.

§ 4. ПРОЦЕССЫ ДОХОДНОСТИ И ПОЛУМАРТИНГАЛЬНАЯ ЭКСПОНЕНТА

В финансовой экономике общепринято определять не ценовые процессы непосредственно, а соответствующие процессы доходности (см. § 1). Кратко опишем общую математическую природу этого соответствия.

Возведение в степень

Пусть $X = \{X_t;\ 0 \le t \le T\}$ будет полумартингалом, и рассмотрим уравнение

$$U_t = U_0 + \int_0^t U_s dX_s\ ,\ \ 0 \le t \le T, \tag{4.38}$$

где $U_0 \in F_0$ также задано.

Мы хотели бы найти полумартингал U, удовлетворяющий уравнению (4.38). Оказывается, что это уравнение всегда имеет полумартингальное решение; оно является единственным и определяется равенством

$$U_t = U_0\, e_t(X), \quad 0 \le t \le T,$$

где

$$e_t(X) = \exp(X_t - X_0 - [X, X]_t/2) \times$$

$$\times \prod_{s \le t} (1 + \Delta X_s) \exp(-\Delta X_s + (\Delta X_s)^2/2). \tag{4.39}$$

Процесс $e(X)$ называется *показательной функцией* (*экспонентой*) *от X в полумартингальном смысле* (*the exponential of X in the semimartingale sense*). Заметим, что $e_0(X) = 1$. Ключевым свойством полумартингальной экспоненты является равенство

$$e(X)\, e(Y) = e(X + Y + [X, Y])$$

для любых двух полумартингалов X и Y. Так как $[X, Y] = 0$, если или X или Y являются непрерывными и VF (см. § 3),

$$\mathcal{E}(X)\,\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X+Y), \text{ если } X - \text{произвольный полумартингал, а } Y \text{ непрерывный и VF.} \tag{4.40}$$

Пусть **R** – множество полумартингалов X таких, что $1 + \Delta X \geq 0$, и пусть $\mathbf{R}^+$ будет множеством таких полумартингалов X, которые удовлетворяют более сильному условию $1 + \Delta X > 0$. Тогда из представления (4.39) следует, что

$$\mathcal{E}(X) \geq 0, \text{ если и только если } X \in \mathbf{R},$$

$$\mathcal{E}(X) > 0, \text{ если и только если } X \in \mathbf{R}^+. \tag{4.41}$$

Процессы доходности

Процесс цен S и соответствующий ему процесс доходности R^k связаны друг с другом с помощью уравнения (4.38) с S^k вместо U и R^k вместо X. После преобразования уравнения (4.38) R^k выражается через S^k по формуле

$$R_t^k = \int_0^t \left(1/S_{u-}^k\right) dS_u^k, \;\; 0 \leq t \leq T, \;\; k = 0, 1, \ldots, K. \tag{4.42}$$

Для непрерывного VF-процесса облигации, выражение (4.42) упрощается до

$$R_t^0 = \ln(S_t^0) = \alpha_t, \;\; 0 \leq t \leq T.$$

Определим $R = (R^0, R^1, \ldots, R^K)$ и назовем R^k *процессом доходности* (*return process*) для ЦБ k.

Следующее рассуждение показывает, что равенство (4.42) действительно определяет R^k однозначно через S^k (напомним, что мы повсюду принимаем **P** непустым). Процесс дисконтированной цены Z^k (см. § 3) является строго положительным мартингалом при любой мере $Q \in \mathbf{P}$, так что Z^k строго положителен и непрерывен слева, подразумевая, что $(1/S_-^k)$ – локально ограниченный. Так как стохастический интеграл в равенстве (4.42) вполне определенный, подынтегральное выражение локально ограничено и интеграл является полумартингалом.

Так как равенство (4.42) эквивалентно утверждению $dS^k = S^k_- \, dR^k$, из приведенных выше результатов видим, что S^k и R^k также связаны полумартингальной экспонентой. То есть

$$S^k = S_0^k \, e(R^k), \qquad k = 0, 1, \ldots, K.$$

Из неравенств (4.41) и строгой положительности S^k следует, что процесс $R^k \in \mathrm{R}^+$ для $k = 0, \ldots, K$.

Теперь рассмотрим процесс дисконтированной цены Z^k. Мы имеем $\beta = \exp(-\alpha) = e(-\alpha)$, поэтому свойство (4.40) дает

$$Z^k = \beta S^k = e(-\alpha)\, S_0^k \, e(R^k) = Z_0^k \, e(R^k - \alpha). \tag{4.43}$$

Определяя *процесс дисконтированной доходности* (*discounted return process*) $Y = (Y^1, \ldots, Y^K)$ соотношением

$$Y_t^k = R_t^k - \alpha, \ \ 0 \le t \le T, \ \ k = 0, 1, \ldots, K, \tag{4.44}$$

из представления (4.43) получаем

$$Z^k = Z_0^k \, e(Y^k).$$

Таким образом, Y^k играет ту же роль для Z^k, что и R^k для S^k. Подчеркнем, что соотношения (4.44) кардинально зависят от нашего предположения, что α – непрерывный и VF, так что $[R^k, -\alpha] = 0$.

§ 5. МНОГОМЕРНАЯ ДИФФУЗИОННАЯ МОДЕЛЬ

Теперь проанализируем обобщение модели Блэка – Шоулса из § 1, в которой имеется облигация и K коррелированных акций. Процессом цены облигации является $S_t^0 = \exp(rt)$, $0 \le t \le T$, с вещественной постоянной r, как и прежде, а каждый из индивидуальных процессов цен акций $S^1, \ldots, S^K$ является геометрическим броуновским движением. Чтобы определить модель строго, будет удобно построить сначала процесс дисконтированной доходности Y (см. § 4), затем процесс дисконтированной цены акции Z (см. § 3) и, наконец, сами процессы S^k. По-прежнему будем обозначать компоненты векторов верхними индексами, кроме нескольких отдельных случаев, когда это может привести к путанице.

Пусть $\Lambda = (\lambda_{ij})$ будет невырожденной $(K\times K)$-матрицей, и определим матрицу ковариаций (симметрическую и положительно определенную) $A = (a_{ij})$ соотношением $A = \Lambda\Lambda^{\mathrm{T}}$, которое означает, что

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{K} \lambda_{ik}\lambda_{jk}, \qquad i,\ j = 1,\ldots,K.$$

Пусть $\mu = (\mu^1,\ldots,\ \mu^K)$ будет вектором вещественных констант. Далее, пусть $W^1,\ldots,\ W^K$ будут независимыми стандартными броуновскими движениями с $W_0^1 = \ldots = W_0^K = 0$, определенными на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P). Затем определим вектор

$$Y_t = \Lambda W_t + \mu t,\ \ 0 \le t \le T, \tag{4.45}$$

с компонентами

$$Y_t^k = \sum_{k=1}^{K} \lambda_{kj} W_t^j + \mu^k t,\ \ 0 \le t \le T,\ \ k = 1,\ldots,K.$$

Таким образом, Y – это вектор броуновских движений с матрицей ковариаций A и вектором дрейфа μ. Теперь пусть $Z_0^1,\ldots,\ Z_0^K$ будут строго положительными константами и положим

$$Z_t^k = Z_0^K \exp\,(Y_t^k - a_{kk}\,t/2),\quad 0 \le t \le T,\quad k = 1,\ldots,K. \tag{4.46}$$

Формула Ито дает нам

$$Z_t^k = Z_0^k + \int_0^t Z_s^k dY_s^k,\quad 0 \le t \le T, \tag{4.47}$$

так что $Z^k = Z_0 E(Y^k)$, как и в § 4. Кроме того,

$$d\,[Z^i, Z^j]_t = Z^i Z^j\, d[Y^i, Y^j]_t = Z^i Z^j\, a_{ij}\, dt. \tag{4.48}$$

Первое равенство в формуле (4.48) следует из представления (4.47) и основного свойства совместной вариации стохастических интегралов, второе является известным свойством броуновского движения. Теперь определим

$$S_t^k = S_t^0 Z_t^k = \exp\,(rt) Z_t^k \ \text{ для } 0 \le t \le T,\quad k = 1,\ldots,K, \tag{4.49}$$

так что $Z^k = \beta S^k$, как в § 3. Из соотношений (4.47)–(4.49) видим, что $S^1,\ldots,S^K$ – коррелированные геометрические броуновские движения, а процесс доходности для S^k имеет вид $R_t^k = Y_t^k + rt$ (броуновское движение с дисперсией a_{kk} и дрейфом $\mu^k + r$). Для информационной структуры берем $\mathbf{F} = \mathbf{F}^W = \mathbf{F}^Y = \mathbf{F}^Z = \mathbf{F}^S$ (см. § 3) так, чтобы инвесторы могли основывать свои торговые решения только на ценах в прошлом и настоящем.

Для последующих явных вычислений полезно следующее наблюдение. Пусть $h = (h^1, \dots, h^K)$ будет функцией, определяемой

$$h^k(x, y, t) = x^k \exp(y^k - a_{kk}\, t/2), \qquad k = 1,\dots, K,$$

для $x, y \in \mathbf{R}^K$ и моментов времени $t \geq 0$. Тогда из определения (4.46) видно, что $Z_t = h(Z_0, Y_t, t)$. Кроме того, легко проверить, что

$$Z_T = h(Z_t, Y_T - Y_t, T - t) \quad \text{для } 0 \leq t \leq T. \tag{4.50}$$

Эквивалентная мера

Поскольку в соответствии с предположением Λ (и, следовательно, A) невырожденная, то существует единственный K-вектор γ, удовлетворяющий уравнению

$$\Lambda\gamma = \mu.$$

Определим векторный процесс $\xi = (\xi^1,\dots, \xi^K)$ соотношением

$$\xi_t = W_t + \gamma t, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4.51}$$

так, чтобы вектора (4.45) можно было переопределить как

$$Y_t = \Lambda\xi_t, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{4.52}$$

Теперь определим мартингал (при P)

$$M_t = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{K} \gamma^k W_t^k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K} (\gamma^k)^2 t\right\}, \ \ 0 \leq t \leq T,$$

и пусть эталонная мера Q дается равенством

$$dQ = M_T\, dP.$$

Поскольку M – строго положительный мартингал с $M_0 = 1$, то Q является вероятностной мерой, эквивалентной P.

Следующее утверждение, иногда называемое *формулой отношения правдоподобия* (*likelihood ratio formula*) для броуновского движения, является частным случаем оригинальной теоремы Гирсанова.

Утверждение 4.8. Процессы $\xi^1,\ldots,\xi^K$ – независимые стандартные броуновские движения при Q.

Из этого утверждения и равенства (4.52) следует, что Y является броуновским движением с нулевым дрейфом и матрицей ковариации A при Q, а затем из представления (4.46), что Z – (векторный) мартингал при Q, как и требуется. Из теоремы 4.2 и теоремы представления, цитируемой в следующем подразделе, следует, что Q – фактически единственный элемент $\mathbf{P}$, но мы не будем прямо использовать этот факт. Зафиксируем Q как нашу *эталонную* меру и затем определим через нее допустимые торговые стратегии (см. § 3).

Полнота

Теперь заменим P на Q, так что термины «интегрируемый», «мартингал» и «локальный мартингал» будут неявно относиться к Q. Из определения (4.51) процесса ξ ясно, что $\mathbf{F} = \mathbf{F}^W = \mathbf{F}^\xi$, т. е. фильтрация в нашей рыночной модели является фильтрацией, порождаемой стандартным броуновским движением ξ. Пусть $\mathbf{M}$ (пространство всех мартингалов) и $\mathbf{M}(Z)$ будут определяться так же, как в § 3.

Мы хотим показать, что $\mathbf{M}(Z) = \mathbf{M}$, и, следовательно, что по теореме 4.2 обсуждаемая модель является полной.

Сначала предположим, что $M \in \mathbf{M}$ квадратично интегрируемый, т. е. что $E^*(|M_T|^2) < \infty$. Известно, что M может быть представлен в форме

$$M_t = M_0 + \int_0^t \theta_s d\xi_s, \quad 0 \le t \le T, \tag{4.53}$$

где $\theta = (\theta^1,\ldots,\theta^K)$ – предсказуемый процесс, удовлетворяющий

$$E^*\left(\int_0^T |\theta_t|^2 dt\right) < \infty. \tag{4.54}$$

Кроме того, каждый мартингал M из броуновской фильтрации $\mathbf{F}$ является непрерывным и, следовательно, *локально* квадратично интегрируемым, из чего следует непосредственно, что каждый $M \in \mathbf{M}$ может быть представлен в форме (4.53) с θ, удовлетворяющим (4.54) *локально*, а это просто означает, что

$$P^*\left(\int_0^T |\theta_t|^2 dt < \infty\right) = 1.$$

Из определения (4.51) и невырожденности Λ это эквивалентно следующему. Каждый $M \in \mathbf{M}$ может быть представлен в форме

$$M_t = M_0 + \int_0^t \eta_s dY_s\,, \quad 0 \le t \le T, \tag{4.55}$$

где $\eta = (\eta^1,\dots,\eta^K)$ является предсказуемым и удовлетворяет равенству

$$P^*\left(\int_0^T |\eta_t|^2 dt < \infty\right) = 1. \tag{4.56}$$

Теперь определим $H = (H^1,\dots,H^K)$ соотношениями

$$H_t^k = \eta_t^{\,k}/Z_t^k \quad \text{для } 0 \le t \le T, \quad k = 1,\dots,K.$$

Используя представление (4.47), формулу (4.55) можно переписать как

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dZ_s\,, \quad 0 \le t \le T,$$

Кроме того, возрастающий процесс (4.35), появившийся при определении $L(Z)$, с учетом равенств (4.48) равен

$$\left(\int_0^t (H_s^k)^2 d[Z^k, Z^k]_s\right)^{1/2} = \left(\int_0^t (\eta_s^k)^2 a_{kk} ds\right)^{1/2}.$$

Этот процесс непрерывен, поэтому он локально интегрируем (при Q) вследствие равенства (4.56); значит, $H \in L(Z)$. Повторим, что всякий $M \in \mathbf{M}$ может быть представлен как сумма $M = M_0 + \int HdZ$ для некоторых $H \in L(Z)$, так что $\mathbf{M} = \mathbf{M}(Z)$, и, следовательно, по теореме 4.2 модель является полной.

Можно обобщить диффузионную модель, обсуждаемую в этом разделе, и все еще иметь полноту. Коэффициенты диффузии a_{ij} можно сделать зависящими от прошлых и настоящих цен более или менее произвольным способом, а коэффициенты дрейфа μ^k могут зависеть даже от большего. (Мы не будем пытаться делать эти утверждения точными, уже не говоря об их обосновании.) Но оказывается, что безрисковая процентная ставка должна быть детерминированной для получения полноты, хотя она может меняться со временем, и что коэффициенты диффузии не могут зависеть от большего, чем от прошлых и настоящих цен. Неизвестно, как определить это последнее свойство точно, но пример процесса приводится в § 6.

Явные вычисления

Рассмотрим класс зависимых исков X, для которого можно вычислить достаточно явно ассоциированную цену $\pi = E^*(\beta_T X)$ и торговую стратегию φ, которая порождает X. Конкретно, в этом подразделе принимаем, что

$$X = \exp(rt)\,\psi(Z_T) \text{ для некоторой } \psi\colon \mathbf{R}_+^K \to \mathbf{R}_+. \tag{4.57}$$

Поскольку $Z_T^k = \exp(-rT)\, S_T^k$ для $k = 1,\ldots, K$, тогда X является функцией только заключительных цен акций. Как обычно, всегда удобнее проводить рассуждения в терминах процесса дисконтированных цен Z. Легко проверить, что если мы говорим об опционе-колл на акцию типа $k = 1$ (с ценой исполнения c и датой истечения T), европейский опцион-колл, рассмотренный в § 1, соответствует функции $\psi(x) = [x^1 - c\exp(-rt)]^+$.

Пусть X задается формулой (4.57) и предполагается в дальнейшем, что он является интегрируемым, т. е.

$$\pi = E^*(\beta_T X) = E^*(X\exp(-rT)) = E^*[\psi(Z_T)] < \infty.$$

Тогда из результата полноты (см. предыдущий подраздел) мы знаем, что X является достижимым по цене π. Кроме того, мы знаем из § 3, что процесс дисконтированных стоимостей $V^* = V^*(\varphi)$ для всякой φ, порождающей X, определяется соотношением

$$V_t^* = E^*(\beta_T X \mid F_t) = E^*[\psi(Z_T) \mid F_t], \quad 0 \le t \le T. \tag{4.58}$$

Наша цель состоит в том, чтобы вычислить V^* и, следовательно, π (так как $\pi = V_0^*$). Сначала определим функцию нормальной плотности

$$\Gamma_t(z) = (2\pi t)^{-K/2} \exp(-|z|^2/2t) \tag{4.59}$$

для $t > 0$ и $z \in \mathbf{R}^K$. Заметим, что

$$P^*\{(\xi_T - \xi_t) \in dz \mid F_t\} = \Gamma_{T-t}(z)\, dz, \tag{4.60}$$

т. е. $(\xi_T - \xi_t)$ является независимым от F_t и имеет плотность $\Gamma_{T-t}(.)$ при Q. Это следует из утверждения 4.8 и того факта, что $\mathrm{F} = \mathrm{F}^{\xi}$. Далее, соотношения (4.50) и (4.52) дают нам

$$Z_T = h(Z_t, \Lambda(\xi_T - \xi_t), T-t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{4.61}$$

Таким образом, на основе соотношений (4.58) – (4.61) мы имеем

$$V_t^* = E^*[\psi(h(Z_t, \Lambda(\xi_T - \xi_t), T-t)) | F_t] =$$

$$= \int \psi(h(Z_t, \Lambda z, T-t))\Gamma_t(z)dz, \tag{4.62}$$

где интеграл вычисляется по $\mathbf{R}^K$.

Определяя

$$f^*(x, t) = \int \psi(h(x, \Lambda z, t))\Gamma_t(z)dz \tag{4.63}$$

для $x \in \mathbf{R}_+^K$ и $t \ge 0$, формулу (4.62) запишем более компактно:

$$V_t^* = f^*(z, T-t), \ 0 \le t \le T. \tag{4.64}$$

В частности, окончательная формула для стоимости X имеет вид

$$\pi = V_0^* = f^*(Z_0, T). \tag{4.65}$$

Очевидно, что равенства (4.63) и (4.65) дают явную формулу вычисления стоимости без дополнительной информации относительно функции выплат ψ.

Чтобы определить торговую стратегию, которая порождает X, вычислим дифференциал от V^* по формуле (4.64) и формуле Ито, замечая, что f^* имеет необходимую регулярность по ее определению (4.63). Обозначив через $(\partial f^*/\partial u)$ частную производную f^* по ее второму аргументу и используя (4.48), имеем

$$dV_t^* = \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial f^*(Z_t, T-t)}{\partial x^k} dZ_t^k + \left(L^* - \frac{\partial}{\partial u} \right) f^*(Z_t, T-t)\, dt, \tag{4.66}$$

где L^* – линейный оператор частного дифференцирования

$$L^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} a_{ij} x^i x^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Отталкиваясь от того факта, что $\Gamma_t(z)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_t(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial^2}{\partial z_k^2}\Gamma_t(z),$$

и выполнив все преобразования, которые определяют f^* в (4.63), можно проверить, что $(\partial/\partial u)f^* = L^*f^*$. Таким образом, приняв

$$\varphi_t^k = \frac{\partial}{\partial x^k} f^*(Z_t, T-t), \quad 0 \le t \le T, \quad k = 1,\dots, K,$$

мы видим, что (4.66) дает

$$V_t^* = V_0^* + \sum_{k=1}^{K}\int_0^t \varphi_t^k dZ_t^k, \quad 0 \le t \le T. \qquad (4.67)$$

Тогда утверждение 4.7 показывает, что стратегия $\varphi = (\varphi^1,\dots, \varphi^K)$ порождает X, где составляющая φ^0 задается соотношением

$$\varphi_t^0 = V_t^* - \sum_{k=1}^{K}\varphi_t^k Z_t^k = f^*(Z_t, T-t) - \sum_{k=1}^{K}\varphi_t^k Z_t^k.$$

Из общего результата представления (утверждение 4.7) и полноты (см. выше) мы знаем, что процесс $V_t^* = f^*(Z_t, T-t)$ может быть представлен в форме (4.67), а из (4.66) мы видим, что дело обстоит так, если и только если f^* удовлетворяет дифференциальному уравнению $(\partial/\partial u)f^* = L^*f^*$. Таким образом, дифференциальное уравнение возникает здесь как логическое последствие различных общих рассуждений. В отличие от этого Блэк и Шоулс впервые получили свою формулу определения цены опциона путем решения аналогичного дифференциального уравнения.

Поскольку все вычисления в этом параграфе сделаны в терминах дисконтирования, они строго не состыковываются с более ранним определением цены опциона, рассмотренным в § 1. Однако такую стыковку всегда можно сделать, переходя от прежнего обсуждения к использованию дисконтирования. В частности, стоимость опциона-колл $f(x, t)$ определяемая формулой (4.5), может быть получена из формулы (4.63) для функции $\psi(x) = [x^1 - c \exp(-rT)]^+$, как указывалось ранее.

§ 6. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЕ ПРИМЕРЫ

Приведем четыре конкретных примера, иллюстрирующих разнообразие и некоторую запутанность, с которой каждый сталкивается в моделях с непрерывной торговлей. Первый пример представляет торговую стратегию, которая приводит к банкротству. Остающиеся три выбраны так, чтобы пролить свет на важный предмет полноты. Мы не делаем какой-либо попытки связать эти примеры с реалистическими проблемами, и анализ их не является ни систематическим, ни строгим.

Стратегия банкротства

Рассмотрим модель Блэка – Шоулса (см. § 1), конкретизированную на случай $r = 0$ (так, чтобы $S^0 = 1$), $T = 1$, и $S_0^1 = 1$. Как прежде, S^0 и S^1 мы называем соответственно процессом цены облигации и процессом цены акции. В качестве первого шага при построении стратегии банкротства (см. § 3) предположим, что $b > 0$ и рассмотрим стратегию

$$\varphi_t^k = \begin{cases} 1+b, & \text{если} \quad k=0,\ 0 \le t \le \tau(b), \\ -b, & \text{если} \quad k=1,\ 0 \le t \le \tau(b), \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где

$$\tau\,(b) = \inf\{t\colon S_t^1 = 1 + 1/b\} = \inf\{t\colon V_t\,(\varphi) = 0\}.$$

Инвестор начинает, имея один доллар богатства. Он продает b акций коротко и покупает $(1 + b)$ облигаций, владея таким портфелем вплоть до момента времени $t = 1$ или до разорения, в зависимости от того, что наступает сначала. Согласно этой стратегии, вероятность разорения равна $p(b) = \text{prob}(\tau\,(b) < 1)$, и ясно, что $p(b)$ увеличивается от нуля до 1, когда b увеличивается от нуля до бесконечности. Продавая коротко очень большое количество акций, инвестор делает свое собственное разорение почти достоверным, но он, вероятно, получит много денег, если «выживет».

Однако шанс выживания может быть полностью устранен путем увеличения количества акций, проданных коротко, следующим способом. На интервале времени [0, 1/2] мы следуем стратегии, изложенной в предыдущем абзаце с параметром $b = 1$. Тогда вероятность разорения в течение интервала [0, 1/2] равна $p \equiv \text{prob}\,(\tau\,(1) \le 1/2)$. Если $\tau\,(1) > 1/2$, мы приспосабливаем количество акций, проданных коротко, к новому уровню b_1 в момент времени 1/2, одновременно изменяя количество облигаций, приобретаемых по способу самофинансирования. Конкретно число b_1 выбирается так, чтобы сделать условную вероятность разорения в течение интервала (1/2, 3/4] снова равной p. В общем случае, если в некоторый момент времени $t_n = 1 - (1/2)^n$ все еще имеется положительное богатство, тогда мы корректируем (обычно увеличивая) количество акций, продаваемых коротко, так, чтобы условная вероятность разорения в течение $(t_n, t_{n+1}]$ снова была равна p. Чтобы выдержать самофинансирование стратегии, количество приобретаемых облигаций, конечно, также нужно корректировать в каждый момент времени t_n. Тогда вероятность выживания через время t_n равна $(1 - p)^n$, т. е. стремится к нулю, когда $n \to \infty$ ($t_n \to 1$). Таким образом, получим кусочно постоянную самофинансируемую стратегию φ с $V_0(\varphi) = 1$, $V(\varphi) \geq 0$ и $V_1(\varphi) = 0$.

Модель точечного процесса

Рассмотрим модель с $K = 1$, $S^0 = 1$ и

$$S_t^1 = S_0^1 \exp(bN_t - \mu t), \tag{4.68}$$

где $N = \{N_t;\ 0 \leq t \leq T\}$ – процесс Пуассона с интенсивностью $\lambda > 0$; b, μ – положительные константы. Это модель Кокса и Росса (см. гл. 2), конкретизированная для случая нулевой безрисковой процентной ставки. Согласно равенству (4.68) S^1 является процессом доходности (см. § 4)

$$R_t^1 = (\exp(b) - 1)\, N_t - \mu t. \tag{4.69}$$

В качестве фильтрации **F** возьмем фильтрацию, порождаемую S^1. Пусть

$$\lambda^* = \mu / (\exp(b) - 1) \tag{4.70}$$

и

$$M_t = (\lambda^*/\lambda)^{N_t} \exp((\lambda - \lambda^*)\, t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Учитывая, что M – строго положительный мартингал при $M_0 = 1$, определим эквивалентную вероятностную меру Q с помощью равенства $dQ = M_T dP$. По теореме о замене меры для точечных процессов N будет процессом Пуассона с интенсивностью λ^* при Q. Из соотношений (4.69) и (4.71) следует, что R^1 – мартингал при Q, и затем из представления (4.68), что S^1 является тем также. Следовательно, Q можно принять в качестве нашей эталонной меры.

Процесс доходности R^1 имеет свойство мартингального представления в (Ω, **P**, Q), и легко проверить, что то же самое должно быть справедливо для S^1. Таким образом, модель полна (см. § 3), и цена, ассоциированная с любым интегрируемым зависимым иском X, $\pi = E^*(X)$, поскольку $\beta = 1$. Рассмотрим опцион-колл $X = [S_T^1 - c]^+$.

Учитывая тот факт, что N имеет интенсивность λ^* при Q, мы получаем формулу определения стоимости

$$\pi = E^*([S_T^1 - c]^+) = E^*([S_0^1 \exp(bN_T - \mu T) - c]^+) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda^* T)^n [S_0^1 \exp(bn - \mu T) - c]^+ .$$

Это является частным случаем (безрисковая процентная ставка равна нулю) формулы, полученной в гл. 2. Точная торговая стратегия, которая порождает этот зависимый иск X, может быть вычислена так же, как в § 5.

Модель, которая не является полной

Пусть (Ω, F, P) будет вероятностным пространством, на котором определено стандартное броуновское движение $W = \{W_t;\ 0 \le t \le T\}$, и независимый процесс $\sigma = \{\sigma_t;\ 0 \le t \le T\}$ такой, что

$$\sigma_t = \begin{cases} 2, & 0 \le t < (1/2)T, \quad \text{с вероятностью } 1, \\ 1, & (1/2)T \le t \le T, \quad \text{с вероятностью } 1/2, \\ 3, & (1/2)T \le t \le T, \quad \text{с вероятностью } 1/2. \end{cases}$$

Пусть $K = 1$, предположим, что $S^0 \equiv 1$ (безрисковая процентная ставка всегда равна нулю), и определим

$$R_t^1 = \int_0^t \sigma_s \, dW_s, \quad 0 \le t \le T.$$

Таким образом, процесс доходности R^1 для акций эволюционирует как броуновское движение без дрейфа с параметром диффузии $\sigma^2 = 4$ на интервале $[0, T/2)$, а затем подбрасывается монета. Если выпадает герб, параметр диффузии увеличивается до $\sigma^2 = 9$, но если выпадает решка, то параметр диффузии уменьшается до $\sigma^2 = 1$. Заметим, что

$$[R^1, R^1]_t = \int_0^t \sigma_s ds, \; 0 \le t \le T. \tag{4.71}$$

Пусть фильтрация **F** порождается R^1 или эквивалентно S^1, так что инвесторы имеют доступ только к прошлой и настоящей информации о ценах. Фильтрация **F** является той же, что и порождаемая W, за исключением того, что по (4.71) и непрерывности **F** справа F_t пополняется на интервале времени $T/2 \le t \le T$ результатами подбрасывания монеты. Очевидно, что R^1 является мартингалом, и легко проверить, что это же справедливо и для процесса цены $S^1 = e(R^1) = \exp(R^1 - [R^1, R^1]/2)$. Конечно, $Z^1 = S^1$, поскольку $\beta = 1$. Таким образом, мы можем принять P в качестве нашей эталонной меры.

Легко доказать, используя тот факт, что W имеет свойство мартингального представления для своей собственной фильтрации, что каждый мартингал на (Ω, **F**, P) имеет форму

$$dM = \psi^1 dS^1 + \psi^2 d\sigma, \; 0 \le y \le T, \tag{4.72}$$

где ψ^1 и ψ^2 предсказуемы.

Так как $Z^1 = S^1$ является непрерывным, только непрерывные мартингалы M могут быть представлены как стохастические интегралы относительно Z^1 и по теореме 4.2 эта модель не полная. Инвесторы не имеют достаточно доступных финансовых инструментов, чтобы нейтрализовать все источники неопределенности.

Однако эта модель может быть сделана полной с помощью введения еще одной ЦБ. Пусть

$$S_t^2 = \begin{cases} 1, & 0 \le t < (1/2)T, \\ 0, & (1/2)T \le t \le T, \quad \sigma_T = 1, \\ 2, & (1/2)T \le t \le T, \quad \sigma_T = 3. \end{cases}$$

Это процесс цены для билета, который может быть куплен (или продан) по цене 1 доллар в любой момент времени до $T/2$. Если выпадает герб (дисперсия увеличивается), билет будет стоить 2 долл., но билет ничего не будет стоить, если выпадает решка. Билеты представляют установленные суммы пари по результатам подбрасывания монеты, и мы принимаем сильное предположение, что цена билетов определенная, остающаяся постоянной вплоть до момента подбрасывания монеты (это предположение не является необходимым, но оно устраняет многие сложности). Ясно, что $S^2 = Z^2$ – мартингал, так что P остается совпадающей с эталонной мерой.

Далее, из представления (4.72) и определения σ и S имеем, что каждый мартингал M удовлетворяет соотношению

$$dM = \psi^1 dS^1 + \psi^2 dS^2 = \psi^1 dZ^1 + \psi^2 dZ^2$$

для некоторых предсказуемых подынтегральных выражений ψ^1 и ψ^2, поэтому по теореме 4.2 модель теперь полная.

Этот пример предполагает другой естественный вопрос, который мог бы возникнуть и для рынков ЦБ с непрерывной торговлей: если задано только фильтрованное вероятностное пространство (Ω, **F**, Q), каким является минимальное число ценных бумаг, адаптированных к **F**, с которыми можно создать полный рынок, и каким является их вид?

Модель смешанного типа

Данный подраздел посвящен еще одному примеру с облигацией и одним типом акций ($K = 1$). Вполне возможно, что эта модель полная.

Может быть, такой пример даст идею для рассмотрения некоторых важных вопросов. Процессом цен облигаций является $S^0 = 1$, поэтому безрисковая процентная ставка равна нулю. Чтобы упростить обозначения, процесс цен акции будет обозначаться через S, а не S^1, а соответствующий процесс доходности через R, а не R^1. Так как $\beta = 1$, то нет никакой разницы между S и $Z = \beta S$ или между R и $Y = R - \alpha$, поэтому будем использовать символы Y и Z с новыми значениями. Параметры времени различных процессов будем указывать как нижние индексы в некоторых местах и как функциональные аргументы в других, в зависимости от того, что более удобно.

Начнем с вероятностного пространства (Ω, F, P), на котором определены стандартный (с нулевым дрейфом и единичной дисперсией) процесс броуновского движения $W = \{W_t;\ t \geq 0\}$, пуассоновский процесс $N = \{N(t);\ t \geq 0\}$ с интенсивностью $\lambda > 0$ и последовательность независимых одинаково распределенных двоичных случайных величин $\{\chi_1, \chi_2, \ldots\}$ таких, что $\chi_n = \pm 1$ с равными вероятностями. Предположим, что W, N и $\{\chi_n\}$ также не зависят друг от друга с $W_0 = N(0) = 0$.

Пусть $l = \{l_t;\, t \geq 0\}$ будет *локальным временем* (*local time*) W в начале координат, что означает

$$l_t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{\{|W_s| \leq \varepsilon\}} ds, \quad t \geq 0. \tag{4.73}$$

Из этого определения очевидно, что

$$l \text{ увеличивается только в момент времени } t, \text{ когда } W_t = 0, \tag{4.74}$$

и известно, что l непрерывно, но не абсолютно непрерывно. Действительно, поскольку множество $\{t\colon W_t = 0)$ имеет нулевую меру Лебега (почти наверное), из равенства (4.73) имеем, что l является постоянным, за исключением множества нулевой меры. Далее, пусть $\tau_0 = 0$,

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0\colon W_t = n\} \text{ для } n = 1, 2, \ldots \tag{4.75}$$

и

$$M(t) = \sup\{n \geq 0\colon \tau_n \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Наконец, пусть γ будет константой ($0 < \gamma < 1$) и определим

$$R_t = W_t + X_t + Y_t, \tag{4.76}$$

где $X_t = N(l_t) - \lambda l_t$ и $Y_t = \gamma\,[\chi_1 + \ldots + \chi_{M(t)}]$.

Заметим, что каждый из моментов времени $T_1, T_2, \ldots$ скачков процесса X должен быть моментом увеличения для l и, таким образом, $W(T_n) = 0$ для всех n согласно (4.74). Напротив, Y скачкообразно изменяется на $\gamma\chi_1, \gamma\chi_2, \ldots$ соответственно в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots$, так что две последовательности моментов времени скачков непересекающиеся, а l – непрерывный процесс VF. Таким образом (см. § 3),

$$[W, W]_t = t, \qquad [X, X]_t = \sum_{s \leq t} (\Delta X_s)^2 = N(l_t),$$

$$[Y, Y]_t = \sum_{s \leq t} (\Delta Y_s)^2 = \gamma^2 M(t) \quad \text{и} \quad [W, X] = [W, Y] = [X, Y] = 0.$$

Теперь определим $S = \mathcal{e}(R)$, принимая для удобства $S_0 = 1$. Из предшествующих формул и из § 4 видим, что имеют место равенства $S = \mathcal{e}(R) = \mathcal{e}(W)\mathcal{e}(X)\mathcal{e}(Y)$. Общая формула (4.39) для полумартингальной экспоненты тогда дает нам

$$S_t = \exp(W_t - t/2) \exp(-\lambda l_t)\, 2^{N(l_t)} \prod_{n=1}^{M(t)} (1 + \gamma\chi_n).$$

Заметим, что наш процесс цены акции S удовлетворяет равенству $dS = SdW$, когда лежащее в основе броуновское движение W не принимает целочисленные значения. В каждый из моментов времени τ_n, когда W впервые принимает положительное целочисленное значение n, процесс S или скачкообразно увеличивается в $(1 + \gamma)$ раз, или уменьшается в $(1 - \gamma)$ раз по отношению к своему предыдущему значению (с равной вероятностью). Также имеются моменты времени T_1, T_2,..., в которые скачки S удваивают его предыдущее значение, но это происходит только тогда, когда W находится в состоянии нуль, и только в такие моменты времени множитель $\exp(-\lambda l_t)$ уменьшает цену акции (непрерывным способом).

Для нашего примера берем фильтрацию, при которой $\mathbf{F} = \mathbf{F}^R = \mathbf{F}^S$ (см. § 3), т. е. инвесторы имеют доступ только к прошлой и настоящей информации о ценах акции. Очевидно, что W, X, Y и, следовательно, R – мартингалы по $\mathbf{F}$, так что $S = \mathcal{e}(R)$ является по крайней мере локальным мартингалом. Кроме того, прямое вычисление показывает, что S – мартингал, так что в качестве нашей эталонной меры мы будем брать непосредственно саму P.

С точки зрения теории мартингалов сумму (4.76) можно рассматривать как разложение R на непрерывную часть мартингала W, сумму его предсказуемых скачков Y и компенсацию суммы ее полностью недостижимых (*totally inaccessible*) скачков X. Момент остановки τ_n называется *предсказуемым*, если существует возрастающая последовательность моментов остановки $\{\tau^k\}$ такая, что $\tau^k \to \tau$ почти наверное при $k \to \infty$. Тогда последовательность $\{\tau^k\}$ называется *анонсом* (*announce*) τ. Каждый из моментов времени первого попадания τ_n в формуле (4.75) является предсказуемым, поскольку мы можем построить последовательность $\{\tau^k\}$, анонсирующую τ^1, взяв

$$\tau^k = \inf\{t \geq 0: W_t = 1 - 1/k\}, \quad k = 1,\ 2, \ldots.$$

В другом крайнем случае момент остановки τ называется *полностью недостижимым* (*totally inaccessible*), если $\mathrm{prob}(\tau = \tau') = 0$ для каждого предсказуемого момента остановки τ'. Моменты времени скачков пуассоновского процесса являются каноническими примерами полностью недостижимых моментов времени остановки, и отсюда можно достаточно легко показать, что моменты времени скачков T_1, T_2,..., упомянутые выше, полностью недостижимы. Эта классификация моментов времени остановки имеет фундаментальную важность в теории мартингалов, а сами определения также кажутся естественными и полезными в целях экономического моделирования.

Процесс доходности R (или эквивалентно S) в этом примере был придуман, чтобы показать и предсказуемые и полностью недостижимые скачки, плюс нетривиальная непрерывная часть мартингала, и в этом смысле он является репрезентативным из наиболее общих возможных мартингалов. Однако у нашего примера также есть та особенность, что R (или S) может содержать только конечное число скачков в течение конечного интервала времени, и в этом отношении он является весьма специальным. Общий мартингал может иметь счетное (*countably infinite*) число скачков в течение конечного времени, и именно из-за этой особенности порождает большинство трудностей в общей теории стохастического интегрирования.

Далее, что является общей формой предсказуемой торговой стратегии в этой модели? Это очень длинная история, которую мы не будем здесь излагать. Для общей теории непрерывной торговли дальнейший анализ этого примера может рассматриваться как упражнение, тем не менее мы скажем несколько слов, чтобы облегчить его решение. Если f, g и h – любые три предсказуемых процесса, то процесс φ, определенный соотношением

$$\varphi_t'(\omega) = \begin{cases} f_t(\omega), & \text{если} \quad W_t(\omega) = 0, \\ g_t(\omega), & \text{если} \quad \tau_n(\omega) = t \text{ для некоторого } n, \\ h_t(\omega) & \qquad\quad \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

также предсказуем, поскольку множества $\{(t, \omega): \tau_n(\omega) = t$ для некоторого $n\}$ и $\{(t, \omega): W_t(\omega) = 0\}$ являются элементами предсказуемой σ-алгебры. Кроме того, для определенной таким образом φ имеем

$$\int \varphi\, dS = \int \varphi S\_dR = \int \varphi S\_(dW + dX + dY) =$$

$$= \int h S\_dW + \int f\, S\_dX + \int g\, S\_dY,$$

используя тот факт, что $\varphi = h$, за исключением множества моментов времени, имеющих нулевую меру Лебега. Это в конечном счете означает, что инвесторы способны использовать совершенно разные торговые стратегии из этих трех компонентов (W, X и Y) процесса доходности R. Тогда из известной полноты броуновского движения, пуассоновского мартингала ($N(t) - \lambda t$) и одномерного случайного блуждания в дискретном времени получаем, что эта модель полна.

ГЛАВА 5

ВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК: МАРТИНГАЛЬНЫЙ ПОДХОД

§ 1. ПРОЦЕСС ДИСКОНТИРОВАННОЙ ЦЕНЫ ОБЛИГАЦИИ КАК МАРТИНГАЛ

В этой главе рассмотрим применение теории мартингалов к области финансов при исследовании проблемы определения цен зависимых платежей, связанных с рисками процентных ставок. Мартингальные методы используются здесь для изучения риска процентной ставки на рынке с двумя основными активами: сберегательные счета и бескупонные облигации. Оказывается, что дисконтированные цены облигаций должны быть мартингалами при нейтральной к риску вероятностной мере. Производится конкретизация результатов, когда мгновенная процентная ставка адаптирована к броуновскому движению или следует процессу диффузии.

В гл. 3 было выяснено, что мартингальные методы для арбитражного определения цен могут применяться в моделях со стохастическими процентными ставками, боле того, они используются даже шире, чем методы обычного дифференциального исчисления. Поэтому внимание здесь сосредоточено на определении цен бескупонных облигаций, и эта проблема будет представлена в рамках общей вероятностной структуры.

Сначала изучим общий случай, в котором отсутствие «бесплатного ланча» и жизнеспособность модели требуют, чтобы дисконтированная цена облигации следовала мартингальному процессу при некоторой модифицированной, «нейтральной к риску» вероятностной мере.

Представим модель риска процентной ставки. За основу принимаем фильтруемое вероятностное пространство для описания того, как *информация* со временем становится доступной участникам рынка. На этом пространстве изучим, какие отношения являются возможными между *мгновенным процессом процентной ставки* и процессом *цены бескупонной облигации* с заданной датой погашения T. Это позволит описать *самофинансирующие стратегии* торговли облигациями в сравнении с инвестированием (текущих) наличных денег на *сберегательные счета* при локально безрисковой мгновенной процентной ставке. Однако нужно принять и формально описать условия отсутствия *арбитража* между облигациями и сберегательными счетами, а также существование, по крайней мере, одного участника, чьи предпочтения по комбинациям текущего потребления и случайного будущего потребления приводят его при заданных процессах мгновенной процентной ставки и цены облигации к выбору стратегии «никакой торговли вовсе». Результаты гл. 3 при заданных предположениях модели позволяют связать мгновенную процентную ставку и цену облигации, а именно: дисконтированный по отношению к мгновенной процентной ставке процесс цены облигации должен быть мартингалом для заданной фильтрации при соответствующей замене исходной, лежащей в основе вероятностной меры, на эквивалентную «нейтральную к риску» вероятностную меру.

Мгновенная процентная ставка и процессы цен облигаций

Опишем математическую модель, выбранную для описания случайного поведения различных активов во времени: сберегательных счетов, облигаций, а также портфелей из них.

Зададим фильтруемое вероятностное пространство $(\Omega, F, P, (F_t))$ модели неопределенности, $0 \le t \le T$, и процесс раскрытия информации со временем: для $0 \le s \le t \le T$ в виде $F_s \subset F_t \subset F = F_T$.

Предположение 5.1. F_0 содержит все пустые множества F_T; P является вырожденной на F_0; для всех $t < T$, $F_t = \cap_{s > t} F_s$.

Так как мгновенная процентная ставка в момент времени t является частью доступной информации, во время t для задания процесса r принимаем следующее предположение.

Предположение 5.2. Процесс $(r_t)_{0 < t < T}$ непредсказуем (см. HJM, 1987, с. 21) и, для почти всех ω функция $t \to r_t(\omega)$ является непрерывной справа для $0 \le t \le T$.

Предположение 5.3. Для почти всех ω функция $t \to r_t(\omega)$ является строго положительной и

$$\int_0^T r_u(\omega) du < \infty.$$

Если для почти всех ω функция $t \to r_t(\omega)$ строго положительная и непрерывная (см. § 2 и 3) и если для всех t значение r является F_t-измеримым, то предположения 5.1 и 5.2 имеют место.

Из процесса r получаем первый финансовый *актив*, математически говоря, элемент $L^2(\Omega, F_T, P)$, путем инвестирования одной денежной единицы в момент времени 0 на счет, зарабатывающий проценты по ставке r_t.

Определение 5.1. Процесс сберегательного счета Z^0 является определенным и конечным, для почти каждого $\omega \in \Omega$, согласно формуле

$$Z_t^0(\omega) = \exp\left(\int_0^t r_u(\omega) du\right).$$

Процесс Z^0 непрерывный почти всюду, строго возрастающий, и каждое $Z_t^0(\omega)$ является F_t-измеримым.

Предположение 5.4. $Z_t^0(\omega) \in L^2(\Omega, F_T, P)$.

Вторым активом будет *дисконтированная облигация*, по которой выплачивается без риска неплатежа одна денежная единица в момент времени T. Цена $P(t, T)$ в момент t, $0 \le t \le T$, этой «бескупонной облигации с датой погашения T» следует стохастическому процессу, относительно которого мы сделаем следующее предположение.

Предположение 5.5. Для каждого момента времени t цена $P(t, T)$ является F_t-измеримой и $P(T, T) = 1$.

Одна из целей главы – получение соотношения между двумя процессами: r и $P(., T)$ на основе безарбитражной модели. Сделаем это сначала, применяя подход гл. 3 к модели со стохастическими процентными ставками.

Торговые стратегии и рыночные активы

Предполагается, что управление сберегательным счетом и облигациями, начинающееся с начального вклада в момент 0 и до завершающей операции и допускающее потребление в момент T, будет производиться без точного знания будущего, путем перемещения денег между сбережением и покупкой (или продажей) облигаций, в моменты времени и в количествах, независимых от непредвидимых будущих событий.

Определение 5.2. Элементарная торговая стратегия $(\theta_t)_{0 \le t \le T}$ есть двумерный стохастический процесс $\theta = (\theta^0, \theta^1)$: $\Omega \times [0, T] \to \mathbf{R}^2$, для которого существует вещественное число $n \ge 1$ и последовательность $0 \le t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n \le t_{n+1} = T$ такая, что θ_{t_k} является ограниченным и F_{t_k}-измеримым, $0 \le k \le n$, и $\theta_t = \theta_{t_k}$ для всех моментов времени t в интервале $[t_k, t_k+1)$, $0 \le k \le n$.

Принимая во внимание, что θ_t^1 может рассматриваться просто как число облигаций, принадлежащих агенту в момент времени t, интерпретация θ_t^0 требует различия между текущими денежными суммами в момент времени t и дисконтированными денежными суммами в момент 0: θ_t^0 является количеством денег, которые, будучи инвестированными в момент времени 0, обеспечили бы в момент времени t текущую стоимость сберегательного счета агента. Предполагается, что кредиты и короткие продажи не накладывают каких-либо ограничений ни на знак, ни на величину θ.

Следующее определение является интуитивным.

Определение 5.3. Назовем самофинансирующей элементарную торговую стратегию $(\theta_t)_{0 \le t \le T} = (\theta_t^0, \theta_t^1)_{0 \le t \le T}$, изменяющую значения в моменты времени $0 \le t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n \le t_{n+1} = T$, если для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\theta_{t_{k-1}}^0 Z_{t_k}^0 + \theta_{t_{k-1}}^1 P(t_k, T) = \theta_{t_k}^0 Z_{t_k}^1 + \theta_{t_k}^1 P(t_k, T).$$

Если мы обозначим через $< , >$ скалярное произведение в $\mathbf{R}^2$ и через Z_t обозначим пару $(Z_t^0, P(t, T))$, свойство самофинансирования может быть записано как $<\theta_{t-}, Z_t> = <\theta_t, Z_t>$, что позволяет нам давать определение без ссылки на момент времени $(t_k)_{k \le n+1}$.

Определение 5.4. Множество M рыночных активов является подмножеством M из пространства $L^2(\Omega, F_T, P)$, состоящего из всех f, для которых существует стратегия самофинансирования $(\theta_t)_{0 \le t \le T}$, такая что

$$f = <\theta_T, Z_T> = \theta_T^0 Z_T^0 + \theta_T^1 P(T, T).$$

Определение цен при отсутствии «бесплатного ланча»

Для описания разумной связи между процессами r и $P(., T)$ примем следующее определение.

Определение 5.5. Процесс $(Z_t)_{0 \le t \le T} = (Z_t^0, P(t, T))_{0 \le t \le T}$ не допускает «бесплатный ланч», если для каждого $f \in M$ такого, что $f \ge 0$ почти всюду, и $\mathbf{P}(f > 0) > 0$ для каждой стратегии самофинансирования θ,

$$f = \langle \theta_T, Z_T \rangle \quad \text{влечет} \quad \langle \theta_0, Z_0 \rangle > 0.$$

Отсутствие бесплатного ланча подразумевает, что для того, чтобы получить положительную стоимость в момент времени T, каждый должен инвестировать положительную стоимость в момент времени 0. В гл. 3 доказано следующее простое свойство.

Если процесс $Z = (Z^0, P(t, T))$ не допускает бесплатного ланча, тогда цена $\pi(f) = \langle \theta_0, Z_0 \rangle$ не зависит от частной стратегии самофинансирования, порождающей рыночный актив $f \in M$, и определяет строго положительную линейную форму на M.

Пара (M, π), определяемая процессами r и $P(., T)$ в отсутствии бесплатного ланча, в гл. 3 названа *системой цен*. Найдем условия того, чтобы она получалась при равновесии цен.

Жизнеспособность системы цен

Жизнеспособность системы цен должна быть интерпретирована как существование по крайней мере одного потребителя, который при заданных его предпочтениях по парам (потребление в момент времени 0, случайное потребление в момент времени T) и заданных ценах активов, удовлетворяется своим начальным вкладом.

Определение 5.6. Система цен (M, π) является жизнеспособной, если существует непрерывное строго монотонное выпуклое соотношение предпочтительности $\succ$ на $\mathbf{R} \times L^2(\Omega, F_T, P)$ такое, что для всякой пары $(\alpha, g) \in \mathbf{R} \times M$ бюджетное ограничение $\alpha + \pi(g) \le 0$ влечет предпочтение $(\alpha, g) \succ (0, 0)$.

С использованием теоремы Хана – Банаха в гл. 3 был доказан следующий результат.

Теорема 5.1. Система цен (M, π) является жизнеспособной, если и только если существует почти всюду $\psi \in L^2(\Omega, F_T, P)$, $\psi > 0$, такой, что для каждого $f \in M$, $\pi(f) = E(f\psi)$.

К нашей модели будем применять этот результат без редукции системы к «настоящей стоимости», хотя *процесс дисконтированной цены облигации* Z^1, определяемый равенством

$$Z_t^1 = P(t,T)\exp\left(-\int_0^t r_u du\right),$$

будет играть основную роль в анализе этой главы. Он, очевидно, содержит меньше информации, чем пара (Z_t^0, $P(t, T)$). Представляется также, что некоторые доказательства являются более прозрачными, если они даются через Z_t, а не через Z_t^1.

Мартингальное определение дисконтированных цен как условие для жизнеспособности

Следующая теорема доказана в гл. 3 для постоянной r_t. Доказательство ее для стохастической r_t аналогично, но для полноты мы дадим его более детально.

Теорема 5.2. Если (Z_t^0, $P(t, T)$) не порождает бесплатного ланча, тогда полученная система цен (M, π) жизнеспособна, если и только если существует вероятностная мера Q на (Ω, F_T) такая, что:

а) $\rho = dQ/dP > 0$ почти всюду (т. е. Q и P являются эквивалентными);

б) $\rho\exp\left(-\int_0^T r_u du\right) \in L^2(\Omega, F_T, P)$;

в) при мере Q процесс дисконтированной цены облигации $Z_t^1 = P(t,T)\exp\left(-\int_0^t r_u du\right)$ является мартингалом.

Доказательство достаточности (т. е. доказательство «если»). Поскольку функция $\varphi = \rho\exp\left(-\int_0^T r_u du\right) \in L^2(\Omega, F_T, P)$, для каждого актива $f \in M \subset L^2$ имеем, что $f\rho\exp\left(-\int_0^T r_u du\right) \in L^1(\Omega, F_T, P)$, но тогда и $f\exp\left(-\int_0^T r_u du\right) \in L^1(\Omega, F_T, Q)$; поэтому функция φ является кандидатом, чтобы быть функционалом ψ из теоремы 5.1.

Так как процесс $(Z_t^1)_{0 \le t \le T}$ предполагается мартингалом по мере Q, имеем

$$Z_t^1 = E_Q[\,Z_T^1 \mid F_t] = E_Q\left[\exp\left(-\int_0^T r_u du\right)\middle| F_t\right],$$

отсюда

$$P(t,\,T) = Z_t^0\,Z_t^1 = Z_t^0\,E_Q\left[\exp\left(-\int_0^T r_u du\right)\middle| F_t\right],$$

$$P(t,\,T) = E_Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_u du\right)\middle| F_t\right],$$

так как процесс Z_t^0 положительный. Отсюда следует, что для всех моментов времени $t < T$ почти всюду $0 < P(t,\,T) < 1$.

Теперь потребуем, чтобы для каждого рыночного актива $f \in M$,

$$\pi(f) = E_Q\left[f \exp\left(-\int_0^T r_u du\right)\right].$$

Пусть $(\theta_t)_{0\,\le\,t\,\le\,T}$ будет самофинансирующей стратегией, порождающей f. Предположим, что $(\theta_t)_{\,t}$ изменяет значения в моменты времени

$$0 = t_0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n \le t_{n+1} = T;$$

отсюда мы имеем

$$E_Q\left[f \exp\left(-\int_0^T r_u du\right)\right] = E_Q\left[\left\langle \theta_{t_{n+1}}, Z_{t_{n+1}}\right\rangle \exp\left(-\int_0^{t_{n+1}} r_u du\right)\right] =$$

$$= E_Q\left[\left\langle \theta_{t_n},\, Z_{t_{n+1}}\right\rangle \exp\left(-\int_0^{t_{n+1}} r_u du\right)\right] =$$

$$= E_Q\left[E_Q\left[\left\langle \theta_{t_n}, Z_{t_{n+1}} \exp\left(-\int_0^{t_{n+1}} r_u du\right)\right\rangle\middle| F_{t_n}\right]\right] =$$

$$= E_Q\left[\left\langle \theta_{t_n}, Z_{t_n} \exp\left(-\int_0^{t_n} r_u du\right)\right\rangle\right].$$

Последнее равенство вытекает из того факта, что $Z_t \exp\left(-\int_0^t r_u du\right) = \; = (1, Z_t^1)$ является мартингалом. Повторяя эту цепочку равенств для других n, окончательно получим величину $E_Q\left(\left\langle \theta_{t_0}, Z_{t_0} \right\rangle\right)$, которая по определению равна $\pi(f)$. Для завершения доказательства этой части следует заметить, что цена $\pi(f)$ также равна и $E\left[\rho f \exp\left(-\int_0^T r_u du\right)\right]$ при $\varphi = \rho \exp\left(-\int_0^T r_u du\right) > 0$ и принадлежит к классу $L^2(\Omega, F_T, P)$.

Доказательство необходимости (доказательство «только если»). Предположим, что функционал определения цены задается выражением $\pi(f) = E(f\,\psi)$ для некоторого $\psi \in L^2(\Omega, F_T, P)$, $\psi > 0$ почти всюду. Поскольку $f = Z_t^0 \in M$, имеем $1 = E\left[\psi \exp\left(\int_0^T r_u du\right)\right]$, и поэтому оказывается, что $\rho = \psi \exp\left(\int_0^T r_u du\right)$ является плотностью вероятностной меры Q на (Ω, F_T), эквивалентной мере P, и $\rho \exp\left(-\int_0^T r_u du\right)$ принадлежит $L^2(\Omega, F_T, P)$.

Используем ту же стратегию, что и в гл. 3, чтобы доказать, что Z_t^1 является мартингалом по отношению к Q. Стратегию определим для заданных $0 \le t \le s \le T$ и $A \in F_t$ соотношениями:

для $u < t$: $\theta_u^0 = \theta_u^1 = 0$;

для $u = t$: $\theta_t^1 = 1$ на A, $\theta_t^1 = 0$ на A^c,

$$\theta_t^0 = -P(t, T)\exp\left(-\int_0^t r_u du\right) \text{ на } A,\ \theta_t^0 = 0 \text{ на } A^c;$$

для $t < u < s$: $\theta_u = \theta_t$;

для $u = s$: $\theta_s^1 = 0$,

$$\theta_s^0 = P(s,\,T)\exp\left(-\int\limits_0^s r_u du\right) - P(t,\,T)\exp\left(-\int\limits_0^t r_u du\right) \text{ на } A,\ \theta_s^0 = 0 \text{ на } A^c;$$

для $u > s$: $\theta_u = \theta_s$.

Стратегия $(\theta_t)_{\,0 \le t \le T}$ является самофинансирующей и порождает

$$f = \left(P(s,T)\exp\left(\int\limits_s^T r_u du\right) - P(t,T)\exp\left(\int\limits_t^T r_u du\right)\right)\mathbf{I}_A$$

с $\mathbf{I}_A = 1$ на A и $\mathbf{I}_A = 0$ на A^c. Так как $\pi(f) = E(f\psi)$ равно нулю, находим

$$\int_A P(s,T)\exp\left(\int\limits_s^T r_u du\right)\psi dP = \int_A P(t,T)\exp\left(\int\limits_t^T r_u du\right)\psi dP,$$

которое можно записать как

$$\int_A P(s,T)\exp\left(-\int\limits_0^s r_u du\right)\rho dP = \int_A P(t,T)\exp\left(-\int\limits_0^t r_u du\right)\rho dP$$

или

$$\int_A Z_s^1 d\mathbf{Q} = \int_A Z_t^1 d\mathbf{Q} \qquad \text{для всех } A \in F_t,$$

что является требуемым выводом: $Z_t^1 = E_Q\left(Z_s^1 \middle| F_t\right)$ для $t < s$.

По причинам, которые станут понятными в § 2, вероятностная мера Q называется *нейтральной к риску.*

Переформулировка мартингального свойства

Свойства а), б), в) теоремы 5.2, взятые совместно, могут быть переписаны в виде

$$P(t,\,T) = Z_t^0 E_Q\left[\left(Z_T^0\right)^{-1} \middle| F_t\right] \quad \text{и} \quad (Z_t^0)^{-1}\,\frac{dQ}{dP} \in L^2(\Omega,\,F_T,\,P).$$

Следствие 5.1. Если (Z_t^0, $P(t, T)$) не допускает бесплатный ланч, тогда получаемая система цен (M, π) жизнеспособна, если и только если существует процесс $(\rho_t)_{0 \le t \le T}$ такой, что:

а) ρ_t является строго положительным мартингалом, таким, что почти всюду траектория $t \to \rho_t(\omega)$ имеет предел слева и непрерывна справа;

б) $\rho_0 = 1$, $\rho_T \exp\{-\int_0^T r_u du\} \in L^2$;

в) $\rho_t P(t, T) \exp\{-\int_0^t r_u du\}$ является мартингалом относительно P.

Доказательство. Пусть $P(t, T) = Z_t^0 E_Q\left[\left(Z_T^0\right)^{-1} \middle| F_t\right]$ для некоторой эквивалентной вероятностной меры Q на (Ω, F_T). Взяв производную Радона – Никодима $\rho = dQ/dP$ на F_T, получим, что положительная функция ρ удовлетворяет свойству

$$\rho_T \exp\left(-\int_0^T r_u du\right) \in L^2(\Omega, F_T, P).$$

Определим условное математическое ожидание $\rho_t = E[\rho \mid F_t]$, которое имеет левый предел и является непрерывным справа (см. Р. Липцер, А. Ширяев, 1977). Для $t < s$ и $A \in F_t$ мы имеем

$$\int_A Z_t^1 dQ = \int_A Z_s^1 dQ, \text{ т. е. } \int_A Z_t^1 \rho dP = \int_A Z_s^1 \rho dP$$

и

$$\int_A Z_t^1 E[\rho | F_t] dP = \int_A Z_s^1 E[\rho | F_s] dP,$$

так как ρ является интегрируемой, а $(Z_t^1)_{0 \le t \le T}$ – ограниченным.

Доказательство того, что ρ_t – строго положительный процесс, является стандартным: определим момент остановки

$$\tau = \inf\{t \mid \rho_t = 0\} \wedge T, \quad (x \wedge y = \min(x, y)).$$

По теореме о произвольном выборе для мартингала $(\rho_t)_{0 \le t \le T}$ имеем $\rho_\tau = E[\rho_T | F_\tau]$ и так как $\{\tau < T\} \in F_\tau$,

$$\int_{\{\tau<T\}} \rho_\tau = \int_{\{\tau<T\}} \rho_T = \int_{\{\tau<T\}} \rho .$$

Из $\rho_\tau = 0$ на $\{\tau < T\}$ следует, что $\int_{\{\tau<T\}}\rho = 0$, отсюда $P\{\tau < T\} = 0$, ρ будет положительным почти всюду, так что положительность ρ_T получается из равенства $\rho = \rho_T$.

Принимая, наоборот, условия а), б) и в) из следствия 5.1, определим меру Q, эквивалентную P, полагая $Q(A) = \int_A \rho_T dP$, и тогда $(dQ/dP)\exp\{-\int_0^T r_u du\}$ принадлежит L^2. Кроме того, для $t < s$

$$\rho_t P(t, T) \exp\{-\int_0^t r_u du\} = E\,[\rho_s P(s, T) \exp\{-\int_0^s r_u du\}|\, F_t]$$

может быть записано как

$$\forall A \in F_\tau \quad \int_A Z_t^1 \rho_t dP = \int_A Z_s^1 \rho_s dP \quad \text{или} \quad \int_A Z_t^1 dQ = \int_A Z_s^1 dQ,$$

т. е.

$$Z_t^1 = E_Q\left[Z_s^1 \middle| F_t\right], \quad P(t, T) = Z_t^0\, E_Q\left[\left(Z_T^0\right)^{-1} \middle| F_t\right].$$

Следствие 5.2. При предположениях и обозначениях следствия 5.1

$$P(t, T) = E\left[\frac{\rho_T}{\rho_t}\exp\left(-\int_t^T r_u du\right) \middle| F_t\right].$$

Доказательство. Процесс $\rho_t P(t, T) \exp\{-\int_0^t r_u du\}$ является мартингалом по отношению к P. Следовательно,

$$\rho_t\, P(t, T) \exp\{-\int_0^t r_u du\} = E\left[\rho_T \exp\left(-\int_0^T r_u du\right) \middle| F_t\right],$$

$$P(t, T) = (\rho_t)^{-1} \exp\{-\int_0^t r_u du\} E\left[\rho_T \exp\left(-\int_0^T r_u du\right) \middle| F_t\right],$$

Выражение, стоящее за пределами символа математического ожидания, может быть неинтегрируемым, но мы получим утверждение следствия, используя монотонную последовательную аппроксимацию и положительность всех случайных величин.

Для дальнейшего заметим, что выражение ρ_T/ρ_t является интегрируемым и что $E[\rho_T/\rho_t|F_t] = 1$, как это можно показать с помощью последовательной аппроксимации.

Если принять модификацию для мартингала $E_Q\left[\left(Z_T^0\right)^{-1}\middle|F_t\right]$, которая непрерывна справа и имеет предел слева почти всюду, тогда такая же регулярность имеет место для процесса $(P(t, T))_{t<T}$. Поэтому для § 2 сделаем следующее предположение.

Предположение 5.6. Для почти всех $\omega \in \Omega$ траектория процесса цены $t \to P(t, T)(\omega)$ имеет предел слева для $t > 0$ и является непрерывной справа для $t < T$.

§ 2. СЛУЧАЙ, КОГДА ПРОЦЕСС МГНОВЕННОЙ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ АДАПТИРОВАН К БРОУНОВСКОМУ ДВИЖЕНИЮ

Соотношение между мгновенным процессом процентной ставки и процессом цены облигации уточним здесь для случая, когда информация порождается процессом, который предполагается броуновским движением. Теорема представления положительных мартингалов относительно броуновского движения позволяет описать процесс цен облигации P_t как стохастический интеграл Ито, включающий мгновенную процентную ставку r_t и лежащий в основе процесс «цены риска». Теорема Гирсанова показывает, что для *нейтральной к риску вероятности* слагаемое дрейфа в дифференциале dP_t/P_t равно $r_t\,dt$, как в детерминированном случае. Формальный результат по дифференциалам Ито, доказывающий, что коэффициент дрейфа является условным математическим ожиданием ставки доходности, обеспечивает достаточное условие единственности нейтральной к риску вероятности, а значит и для арбитражного определения цены в рамках модели для *любого* актива.

Дополнительно предполагаем, что процесс мгновенной процентной ставки порождает ту же информацию, как и заданная фильтрация, и как существование какого-либо броуновского движения с теми же информационными свойствами. Классические результаты по представлению положительных мартингалов относительно броуновского движения позволяют описать процесс цен облигации как стохастический интеграл Ито, включающий мгновенную процентную ставку и лежащий в основе «процесс цены риска».

Получим предварительные результаты единственности путем доказательства того, что коэффициент дрейфа в дифференциале Ито является также условным математическим ожиданием ставки доходности при общих предположениях (а не L^2 интегрируемости) на коэффициенты в дифференциале Ито. Этот факт, интересный сам по себе в математическом смысле, показывает, что процесс цены риска определяется единственным образом с помощью процессов мгновенной процентной ставки и цены облигаций. Отсюда можно установить достаточное условие для единственности нейтральной к риску вероятностной меры § 1, также как и для *арбитражного определения цены любого актива.* Это позволяет нам также вывести мгновенную процентную ставку из цен облигаций по инфинитезимальным временным интервалам.

Мгновенные процентные ставки и цены облигации, адаптированные к броуновскому движению

Чтобы описать более детально механизм поступления информации к участникам рынка, сделаем следующие предположения существования и связи.

Предположение 5.7. Стандартный броуновский процесс $(B_t)_{t\geq 0}$ задается на (Ω, F_T, P). То есть для всякого семейства $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ существует последовательность $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ независимых случайных величин, нормально распределенных с нулевым средним и дисперсиями $t_0 \leq t_1 - t_0 \leq \ldots \leq t_n - t_{n-1}$. Процесс $(B_t)_{t\geq 0}$ непрерывный почти всюду.

Предположение 5.8. σ-Алгебра F_t порождается значениями процесса B_u, $0 \leq u \leq t$, и всеми множествами нулевой меры σ $(B_s, s \geq 0)$.

Хорошо известно, что семейство $(F_t)_{0\leq t\leq T}$ является непрерывным справа (см. Р. Липцер и А. Ширяев).

Предположение 5.9. С точностью до множеств меры нуль σ-алгебра F_t порождается величинами $(r_u)_{u\leq t}$.

Последнее предположение является очень важным с точки зрения моделирования и позволяет нам описывать броуновское движение посредством информации, поступающей только от $(r_u)_{u\geq 0}$, избегая так называемых инновационных процессов.

Наконец сформулируем экономические предположения.

Предположение 5.10. Система цен $(Z_t)_{0 \le t \le T} = (Z_t^0, P(t, T))_{0 \le t \le T}$ не допускает бесплатного ланча, а выводимая система цен жизнеспособна.

С этого времени и, возможно, без дальнейшего уведомления предположим, что наша модель удовлетворяет следующему предположению.

Предположение 5.11. Модель одновременно удовлетворяет предположениям 5.1–5.10.

При предположении 5.11 мартингальное свойство, выражаемое в теореме 5.2, приводит к *заданию* цен дисконтированных облигаций благодаря двум классическим результатам по представлению мартингалов относительно броуновского движения.

Результат 1). Для $Z \in L^1(\Omega, F_T, \mathbf{P})$ существует предсказуемый процесс $(f_s)_{0 \le s \le T}$ такой, что:

а) $E[Z \mid F_t] = Z_0 + \int_0^t f_s dB_s$;

б) $Z = Z_0 + \int_0^T f_s dB_s$;

в) $P\left(\int_0^T f_s^2 ds < \infty\right) = 1$;

г) $E[Z^2] = Z_0^2 + E\left(\int_0^T f_s^2 ds\right)$.

Части а), б) и в) этого результата получаем путем применения к мартингалу $Y_t = E\,[Z \mid F_t]$ теоремы 5.7 (см. Р. Липцер, А. Ширяев, 1977), где, к сожалению, предсказуемость процесса f не упоминается; кроме того, затем следует использовать результат леммы 5.5. Часть г) этого результата в случае $Z \in L^2(\Omega, F_T, P)$ является просто перефразировкой свойства *изометрии* стохастического интеграла. Из свойства непрерывности стохастического интеграла следует, что для получения непрерывной траектории можно выбрать мартингал $(E[Z \mid F_t])_{0 \le t \le T}$.

Такое же замечание относительно предсказуемости применяется к теореме 5.9 в книге Р. Липцера и А. Ширяева, формулируемой ниже как второй результат, где свойство в), доказывается простым вычислением.

Результат 2). Если $Z \in L^1(\Omega, F_T, \mathbf{P})$ является положительным почти всюду, тогда имеется предсказуемый процесс $(g_s)_{0 \le s \le T}$ такой, что:

а) $P\left(\int_0^T g_s^2 ds < \infty\right) = 1$;

б) $Z_t = E[Z \mid F_t] = Z_0 \exp\left(\int\limits_0^t g_s dB_s - \frac{1}{2}\int\limits_0^t g_s^2 ds\right);$

в) $E\left[\exp\left(\int_0^u g_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^u g_s^2 ds\right)\middle| F_t\right] = 1$ для $t \le u$.

Процесс цен облигации как стохастический интеграл

Здесь применяются результаты предыдущего подраздела к мартингальному представлению цен дисконтируемых облигации § 1 для получения интеграла и дифференциальных представлений, относящихся к процессу «цены риска» для них.

Сначала рассмотрим представление положительного мартингала $\rho_t = E\left[dQ/dP\middle|F_t\right]$.

Утверждение 5.1. При предположениях 5.11 процесс цен облигации задается соотношением

$$P(t,T) = E\left[\exp\left(-\int\limits_t^T r_u du\right)\exp\left(\int\limits_t^T q_u dB_u - \frac{1}{2}\int\limits_t^T q_u^2 du\right)\middle| F_t\right],$$

где $(q_s)_{\,0 \le s \le T}$ является предсказуемым процессом таким, что:

а) $P\left(\int\limits_0^T g_s^2 ds < \infty\right) = 1;$

б) $E\exp\left(\int\limits_0^T g_s dB_s - \frac{1}{2}\int\limits_0^T g_s^2 ds\right) = 1;$

в) $\exp\left(-\int\limits_0^T r_u du\right)\exp\left(\int\limits_0^T q_u dB_u - \frac{1}{2}\int\limits_0^T q_u^2 du\right) \in L^2(\Omega, F_T, P).$

Доказательство. Утверждение а) следствия 5.1 и результат 2) обеспечивают выполнение а) и б) для процесса $(q_s)_{\,0 \le s \le T}$. Утверждение в) следствия 5.1 и формула б) результата 2) доказывают вид аналитического выражения для $P(t, T)$.

Применяя теперь теорему представления к мартингалу, включающему $P(t, T)$, получаем следующее утверждение.

Утверждение 5.2. При предположениях 5.11 процесс цен облигации $(P(t,T))_{\,0 \le t \le T}$ является непрерывным процессом со стохастическим дифференциалом

$$dP(t, T) = \mu_t P(t, T)\, dt + \sigma_t P(t, T)\, dB_t$$

таким, что:

а) $(\mu_t, \sigma_t)_{0 \le t \le T}$ является предсказуемым;

б) $\int_0^T \sigma_u^2 du < \infty$ и $\int_0^T |\mu_u| du < \infty$ почти всюду;

в) $\mu_t - r_t + \sigma_t q_t = 0$, q_t – такой же, как в утверждении 5.1.

Доказательство. Следствие 5.2 (§ 1) обеспечивает равенство

$$P(t, T)\exp\left(-\int_0^t r_u du\right)\rho_t = E\left[\rho_T \exp\left(-\int_0^T r_u du\right)\middle| F_t\right],$$

левая часть которого уже непрерывна справа. Так как правая часть изменяется непрерывно (см. пункт а) результата 1), левая часть должна быть непрерывной почти всюду, и процесс $(P(t,T))_{0 \le t \le T}$ будет непрерывным почти всюду.

Применив результат 2), получим

$$P(t, T)\exp\left(-\int_0^t r_u du\right)\rho_t = P(0, T)\exp\left(\int_0^t f_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f_s^2 ds\right),$$

где а) $(f_t)_{0 \le t \le T}$ является предсказуемым;

б) $\int_0^T f_u^2 du < \infty$ почти всюду;

в) $E\left[\exp\left(\int_0^T f_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T f_s^2 ds\right)\right] = 1.$

Поэтому

$$P(t, T) = P(0, T)\ \exp\left(\int_0^t r_u du\right)\exp\left(-\int_0^t q_u dB_u + \frac{1}{2}\int_0^t q_u^2 du\right)\times$$

$$\times\exp\left(\int_0^t f_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f_s^2 ds\right) =$$

$$= P(0, T)\ \exp\left(\int_0^t (f_u - q_u) dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t (f_u - q_u)^2 du + \int_0^t \left(r_s + q_s^2 - q_s f_s\right) ds\right),$$

где интегралы имеют смысл, так как $\int_0^T (f_u - q_u)^2 du < \infty$ почти всюду, поскольку справедливы неравенства $\int_0^T f_u^2 du < \infty$, $\int_0^T q_u^2 du < \infty$ и

$\int_0^T \left(r_s + q_s^2 + |q_s f_s| \right) ds < \infty$ почти всюду. Часть в) утверждения следует из получаемых по формуле Ито равенств $\mu_s = r_s + q_s^2 - q_s f_s$ и $\sigma_s = f_s - q_s$.

Следующее следствие утверждения 5.2 может служить первым объяснением названия «нейтральная к риску вероятность», используемого для меры Q с плотностью

$$\rho = \exp\left(\int_0^T q_u dB_u - \frac{1}{2} \int_0^T q_u^2 du \right).$$

Следствие 5.3. При выполнении предположений 5.11 процесс r_t является функцией дрейфа $P(t, T)$ относительно нейтральной к риску вероятностной мере Q.

Доказательство. Теорема Гирсанова (см. Р. Липцер, А. Ширяев, теорема 6.3) гарантирует, что процесс $\widetilde{B}_u = B_u - \int_0^u q_s ds$ является броуновским движением при вероятностной мере Q и выражение dP может быть записано согласно в) утверждения 5.2 как

$$dP(t, T) = (\mu_t + \sigma_t q_t)\, P_t\, dt + \sigma_t\, P_t (dB_t - q_t\, dt) = r_t\, P_t\, dt + \sigma_t\, P_t\, d\widetilde{B}_t .$$

Функционал $(q_s)_{0 \le s \le T}$ может быть интерпретирован как *цена за единицу риска*, измеряемого разностью между доходами облигации и (локально свободным от риска) сберегательного счета.

Описание функции дрейфа в стохастических дифференциалах

Рассмотрим проблему единственности. Из структуры мартингалов по отношению к $(F_t)_{t \le T}$ следует, что встречающиеся предсказуемые процессы определяются с точностью до множеств меры нуль в пространстве $[0, T] \times \Omega$, оснащенном произведением мер $m \otimes P$, m – мера Лебега на $[0, T]$; поэтому единственность должна пониматься с точностью до множеств $m \otimes P$ меры нуль.

Единственность определения цены актива связана посредством результатов § 1 с единственностью нейтральной к риску меры Q, а отсюда – с единственностью процесса $(q_s)_{0 \le s \le T}$ в утверждении 5.1. Поэтому мы исследуем проблему того, как можно идентифицировать процесс $(q_s)_{0 \le s \le T}$ из $(Z_t)_{0 \le t \le T}$ с помощью дифференциального выражения утверждения 5.2. Следующая теорема, достаточно формальная по характеру, расширяет известные условия, при которых коэффициент дрейфа оказывается условным математическим ожиданием ставки доходности.

Теорема 5.3. Пусть $(X_u)_{0 \le u \le T}$ является непрерывным процессом с дифференциалом Ито

$$dX_u = \lambda_u du + k_u dB_u, \quad \int_0^T (|\lambda_u| + |k_u^2|)\,du < \infty \text{ почти всюду.}$$

Тогда по мере $m \otimes P$ на $[0, T] \times \Omega$

$$\lambda_u = \lim_{N\to\infty} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} E\Big(X_{(u+h)\wedge\tau_N} - X_{u\wedge\tau_N}\Big|F_u\Big),$$

где почти всюду $\tau_n = \inf\{u \,\|X_u| \ge n\} \wedge T$.

Доказательство. Из общей теории стохастических процессов следует, что условные ожидания $Y_u = E(X_{(u+1/n)\wedge\tau_n} \,|\, F_u)$ могут быть выбраны таким образом, чтобы $(Y_u)_{0 \le u \le T}$ являлся непрерывным почти всюду. Этот факт стандартный, но из-за сложности опишем доказательство лишь в общих чертах.

Процесс $u \to X_{(u+1/n)\wedge\tau_n}$ – измеримый и имеет измеримую проекцию Y_u. Последняя удовлетворяет равенству $Y_v = E(X_{(v+1/n)\wedge\tau_n} \,|\, F_v)$ почти всюду для каждого момента остановки v, следовательно,

$$Y_u = E(X_{(u+1/n)\wedge\tau_n} \,|\, F_u) \text{ почти всюду, } u \le T.$$

При предположении 5.8 семейство $(F_t)_{0 \le t \le T}$ квазинепрерывно слева и, следовательно, достижимые и предсказуемые σ-алгебры совпадают. При заданном $\varepsilon > 0$ мы сначала выберем N так, чтобы выполнялось неравенство $(2 + T)P[\nu_N < T] < \varepsilon$ для момента остановки

$$\nu_N = \inf\left\{t \;\middle|\; \int_0^t |\lambda_u| du > N \text{ или } \int_0^t k_u^2 du > N\right\} \wedge T;$$

затем найдем h_0 такое, чтобы математическое ожидание

$$E\left(\int_{[0,\nu_N]} dm \left|\frac{1}{h}\int_u^{(u+h)\wedge\nu_N} \lambda_s ds - \lambda_u\right|\right)$$

было меньше ε для каждого h из $]0, h_0[$. Это дает нам доказательство теоремы в случае ограниченного процесса $(X_u)_{0 \le u \le T}$. Обращаясь к общему случаю, можно применить локализацию: дифференциал остановленного процесса при τ_N ($X_{u \wedge \tau_N}$)

$$d(X_{u\wedge\tau_N}) = \lambda_u \mathbf{I}_{\{u<\tau_N\}} du + k_u \mathbf{I}_{\{u<\tau_N\}} dB_u .$$

Отсюда следует, что по мере $m \otimes P$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} E\left(X_{(u+h)\wedge\tau_N} - X_{u\wedge\tau_N} \middle| F_u\right) = \lambda_u \mathbf{I}_{\{u<\tau_N\}} .$$

Переход к пределу $N \to \infty$ дает требуемый результат.

Результаты единственности

Теорема 5.3 позволяет воспользоваться средством изучения единственности коэффициентов дрейфа и дисперсии в дифференциальном уравнении процесса цены облигации P, так же как и единственности процесса цены риска и нейтральной к риску вероятностной меры. Во-первых, она непосредственно показывает, что по мере $m \otimes P$ пределом $(1/h)E[P(u + h, T) - P(u, T)|\, F_u]$ при $h \to 0$ является $\mu_u P(u, T)$. Далее следуют два других свойства.

Утверждение 5.3. В предположениях 5.11 процессы $(\mu_u)_{0 \le u \le T}$ и $(\sigma_u)_{0 \le u \le T}$ (см. утверждение 5.2) однозначно определяются процессами $(r_u)_{0 \le u \le T}$ и $(P(u, T))_{0 \le u \le T}$.

Доказательство. Поскольку P не обращается в нуль, $(\mu_u)_{0 \le u \le T}$ регенерируется непосредственно. Так как $P(t, T) - \int_0^t \mu_s P(s,T)ds$ является локальным мартингалом, расширение результата представления (§ 5.2) на локальные мартингалы (см. Р. Липцер, А. Ширяев) обеспечивает единственность $(\sigma_u)_{0 \le u \le T}$. Альтернативным доказательством является применение теоремы 5.1 к процессу $P(t, T) \exp(-B_t^2)$, чтобы получить по формуле Ито дрейф в виде

$$P(t, T) \exp(- B_t^2)\, (\mu_t + 2B_t^2 - 1 - 2\sigma_t B_t).$$

Так как по предположениям 5.8 и 5.9 B_t является регенерируемым из процесса $(r_u)_{0 \le u \le t}$, знание процессов $(P(u, T))_{0 \le u \le T}$ и $(r_u)_{0 \le u \le T}$ дает возможность определить $(\mu_u)_{0 \le u \le T}$ и $(\sigma_u)_{0 \le u \le T}$.

Для процесса «цены риска» единственность вытекает из полученных ранее результатов.

Следствие 5.4. При предположениях 5.11 процесс $(q_u)_{0\le u\le T}$ (см. утверждение 5.1) единственным образом определяется двумя процессами $(r_u)_{0\le u\le T}$ и $(P(u, T))_{0\le u\le T}$ на множестве $S^c = \{(u, \omega) | \sigma_u(\omega) \ne 0\}$.

Доказательство. Пункт в) в утверждении 5.2, $\mu_t - r_t + \sigma_t q_t = 0$, просто доказывает следствие.

Начиная с этого места, зарезервируем символы μ_t и σ_t для элементов дифференциала P, т. е.

$$dP(t, T) = \mu_t P(t, T)\, dt + \sigma_t P(t, T) dB_t.$$

Так как единственность для q эквивалентна единственности для Q, предположение $m \otimes P = 0$ по следствию, приведенному выше, гарантирует единственность Q. Обратное утверждение является более формальным.

Теорема 5.4. Для единственности нейтральной к риску вероятностной меры Q необходимо иметь $m \otimes P\, (\{(u, \omega) | \sigma_u(\omega) = 0\}) = 0$.

Доказательство этой теоремы здесь опускаем.

Теорема 5.4 обеспечивает достаточное условие для возможности *арбитражного определения цены любого актива*.

Утверждение 5.4. При выполнении предположений 5.11, если

$$m \otimes P\, (\{(u, \omega) | \sigma_u(\omega) = 0\}) = 0,$$

тогда для всякого элемента g из $L^2(\Omega, F_T, P)$ может быть определена цена посредством арбитража. Эта цена $\pi(g)$ дается выражением

$$\pi(g) = E\left[g \exp\left(-\int_0^T r_u du \right) \exp\left(\int_0^T q_u dB_u - \frac{1}{2}\int_0^T q_u^2 du \right)\right],$$

где $q_u = -(\mu_u - r_u)/\sigma_u$; $dP_u = \mu_u P_u\, dt + \sigma_u P_u\, dB_u$.

Доказательство. Формула определения цены, установленная выше, является эквивалентной равенству $\pi(g) = E_Q\left[g \exp\left(-\int_0^T r_u du \right)\right]$ и единственность представляющей меры влечет, что цена каждого элемента из L^2 может быть определена арбитражным способом.

Единственность представляющей меры относится к плотности «устойчивого» пространства, порождаемого M: из единственности следует, что M является компактным в $L^2(\Omega, F_T, P)$.

Для $g \in L^2(\Omega, F_T, P)$ его цена в момент u, $u > 0$, может быть определена следующим образом. При предположении (*) и $m \otimes P\ (S) = 0$ цена Y_u элемента g в момент u должна быть такой, что система остается жизнеспособной , если добавляется стоимость $Y_u \exp\left(-\int_0^u r_s ds\right)$. Отсюда она должна быть мартингалом при Q. Поэтому

$$Y_u = \exp\left(\int_0^u r_s ds\right)\rho_u^{-1} E\left[g \exp\left(-\int_0^T r_s ds\right)\rho_T \middle| F_u\right].$$

Если $g\exp\left(-\int_0^T r_u du\right)$ ограничено, то

$$Y_u = E\left[g \exp\left(-\int_u^T r_s ds\right)\exp\left(\int_u^T q_s dB_s - \frac{1}{2}\int_u^T q_s^2 ds\right)\middle| F_u\right].$$

Алгоритм определения цены, данный в утверждении 5.4, сводится к следующему: «просто интегрируйте дисконтированную стоимость актива в момент T по отношению к мере Q», что объясняет термин «нейтральная к риску вероятностная мера Q».

Идентификация процесса мгновенной процентной ставки с помощью процесса цены облигации

Сформулируем часто используемое утверждение о мгновенной процентной ставке в момент s, являющейся «пределом при $h \to 0$ внутренней нормы прибыли в момент времени s на облигацию с датой погашения $s + h$» и приведем его доказательство.

Формально бескупонная облигация, по которой владельцу выплачивается 1 денежная единица в момент времени $t < T$, должна быть элементом $g \exp\left(-\int_t^T r_u du\right)$ из $L^2(\Omega, F_T, P)$. Согласно утверждению 5.4 (§ 2), ее цена в момент u, $u < t$, определяется выражением

$$P(u, t) = E\left[\exp\left(-\int_u^t r_s ds\right)\exp\left(\int_u^T q_s dB_s - \frac{1}{2}\int_u^T q_s^2 ds\right)\middle| F_u\right].$$

В момент u, $u > t$, цена задается просто в виде $\exp\left(-\int_t^u r_u du\right)$.

Теорема 5.5. При предположениях 5.11, если $m \otimes \mathbf{P}\ (S) = 0$, то:

а) $\lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{1}{h}\ln P(u,u+h)\right) = r_u$ по мере $m \otimes \mathbf{P}$;

б) если $\max\limits_{0\le u\le T} r_u \in L^1(\Omega, F_T, \boldsymbol{Q})$, тогда для каждого $u < T$ мы имеем

$\lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{1}{h}\ln P(u,u+h)\right) = r_u$ почти всюду.

Доказательство этой теоремы опускаем из-за громоздкости.

Соотношение $\lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{1}{h}\ln P(u,u+h)\right) = r_u$ допускает интерпретацию r_u как процесса мгновенной процентной ставки. Это также показывает, что отсутствие арбитража возможно между «краткосрочными» облигациями и сберегательными счетами.

Единственность была необходима только для получения единственного выражения для стоимости $P\ [u, (u + h) \wedge T]$. Если Q не единственная и мы согласны вычислять цену всех этих облигаций с той же мерой, тогда может быть доказана аналогичная теорема. К сожалению, если Q не является единственной, то нет экономического смысла производить вычисления с одинаковой вероятностной мерой.

§ 3. СЛУЧАЙ, КОГДА МГНОВЕННАЯ ПРОЦЕНТНАЯ СТАВКА ЯВЛЯЕТСЯ ДИФФУЗИОННЫМ ПРОЦЕССОМ

Предположим, что мгновенная процентная ставка следует диффузионному процессу, и сопоставим получающиеся результаты с обычным дифференциальным подходом в финансовой экономике, соблюдая математический уровень строгости при определениях и доказательствах. Основным результатом будет получение дифференциального уравнения в частных производных для цены облигаций как функции только от мгновенной процентной ставки. Для простоты доказательств, мы рассмотрим только стационарный случай. Докажем, что при условиях регулярности:

а) процесс сберегательного счета квадратично интегрируемый;

б) процесс цены облигации – не более чем зависящая от времени детерминированная функция процесса мгновенной процентной ставки, если и только если то же верно для цены процесса риска;

в) при предположениях дифференцируемости детерминированная функция пункта б) удовлетворяет параболическому уравнению в частных производных, а процесс цены облигации – тоже диффузионный процесс.

Из предположения диффузии следует, что процесс мгновенной процентной ставки $(r_t)_t$ является марковским. Не будем использовать каноническое представление, которое становится неизбежным для более строгого анализа. Марковское свойство выражается здесь в следующем виде.

Марковское свойство. Для всякой ограниченной измеримой функции g на Ω, зависящей от r_u, для $t \le u \le T$ при заданном t, т. е. g, измеримой относительно σ-алгебры $\sigma(r_u;\ t \le u \le T)$, имеет место равенство $E[g|F_t] = E[g|r_t]$.

Для простоты принимаем, что коэффициенты дрейфа и диффузии для dr_t принадлежат классу C^∞, и, что более важно, за конечное время процесс r_t никогда не достигает ни 0 ни $+\infty$.

Предположение 5.12. Процесс $(r_t)_t$ следует стационарному диффузионному процессу

$$dr_t = a(r_t)\,dt + b(r_t)\,dB_t,$$

где a, b являются C^∞ функциями на $(0,+\infty)$ и $b < 0$. Кроме того, для каждой стартовой точки $r_0 = x$

$$\mathbf{P}\{0 < \inf_{0\le t\le T} r_t \le \sup_{0\le t\le T} r_t < +\infty\} = 1.$$

Условия на a и b, гарантирующие отсутствие взрывного изменения r_t, известны как условия Феллера. Известно, что для данных a и b и $x > 0$ имеется только одно строгое решение дифференциального уравнения предположения 5.12, такое, что $r_0 = x$.

Из единственности решения следует, что предположения 5.2, 5.3 и 5.9 вытекают из предположения 5.12. Докажем это. У нас имеется функция g: $(0, +\infty) \to \mathrm{R}$ из C^∞ с $g' = 1/6\,f$; процесс $X_t = g\,(r_t)$ удовлетворяет уравнению

$$dX_t = (g'(r_t)\,a\,(r_t) + g''(r_t)\,b^2(r_t)/2)\,dt + g'(r_t)\,b\,(r_t)\,dB_t,$$

но так как $g' \ne 0$, функция g имеет обратную h, т. е. $r_t = h(X_t)$ и

$$dX_t = \alpha(X_t)\,dt + dB_t$$

для некоторой функции α из C^{∞}. Последнее уравнение показывает, что для $0 \le u \le s$ процесс $(B_u)_{0 \le u \le s}$ может быть регенерирован из процесса $(X_u)_{0 \le u \le s}$, а значит, и из процесса $(r_u)_{0 \le u \le s}$. Разности $(B_u - B_t)_{t \le u \le s}$ могут быть также регенерированы из $(r_u)_{t \le u \le s}$. Наконец, очень важное замечание для последующего использования: как бы ни определялся стохастический интеграл $\int_t^s f(u, r_u)dB_u$, эти функции зависят только от $(r_u)_{t \le u \le s}$.

Тот факт, что $b < 0$, может показаться странным, поскольку обычно b интерпретируется как стандартное отклонение. Однако знак b является неважным, потому что, если заменить B_t на $-B_t$, b изменяет свой знак. Для дальнейшего использования лучше, чтобы коэффициент диффузии цены $P(t, T)$ был положительным, и так как оказывается, что последний имеет знак, противоположный к знаку b, принимаем $b < 0$. Тот факт, что b не обращается в нуль, является существенным при описании функционирования рынка.

Достаточные условия интегрируемости сберегательного счета

Диффузионное предположение 5.12 о процессе мгновенной процентной ставки не обязательно влечет свойство интегрируемости предположения 5.4 для процесса цены облигации. Приводимая ниже теорема устанавливает достаточное условие выполнения предположения 5.4, которое имеет разумное экономическое дополнение: ограниченность коэффициента дрейфа при dr_t должна быть следствием экономических сил, возвращающих мгновенную процентную ставку обратно к «нормальным» значениям, если случается, что она становится достаточно высокой. В конкретных моделях даже обычно предполагается $a(x) < 0$ для достаточно больших x.

Теорема 5.6. Если в предположении 5.12 коэффициент диффузии $b(.)$ является ограниченным и коэффициент дрейфа $a(.)$ ограничен сверху на бесконечности, тогда для всякого $\gamma > 0$ и $x > 0$ процесс, стартующий из x (т. е. $r_0 = x$), удовлетворяет неравенству

$$E\left[\exp\left(\gamma \max_{0 \le u \le T} r_u\right)\right] < \infty.$$

В частности, для каждого начального значения r_0 мгновенной процентной ставки финальное значение сберегательного счета $\exp\left(\int_0^T r_u du\right)$ является элементом $L^2(\Omega, F_T, P)$.

Доказательство. а) Для доказательства теоремы нам нужно показать, что процесс с положительными значениями $X_u = \exp(\gamma r_u)$ удовлетворяет неравенству $E(\max_{0 \le u \le T} X_u^2) < \infty$.

б) Формула Ито позволяет записать уравнение

$$dX_u = \left(\gamma a\left(\frac{\ln X_u}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}\gamma^2 b^2\left(\frac{\ln X_u}{\gamma}\right)\right)X_u du + \gamma b\left(\frac{\ln X_u}{\gamma}\right)X_u dB_u$$

или

$$dX_u = \alpha(X_u)X_u du + \beta(X_u)X_u dB_u$$

для некоторых функций α и β из C^∞ на $(0, \infty)$, где для некоторых $K > 0$ $|\beta(x)| < K$, и для некоторых чисел $\bar{x} > \exp(\gamma x_0)$ функция $\alpha(x) \le K$ для всех $x \ge \bar{x}$. Покажем, что ограниченность $\alpha(x)$ на бесконечности компенсирует возможные большие значения X_s в $\int_0^u \alpha(X_s)\, ds$.

в) Пусть u будет произвольным моментом времени между 0 и T. Тогда для $\omega \in \Omega$ такого, что $X_u(\omega) > \bar{x}$, введем последний момент времени перед u, когда выполнялось равенство $X_s = \bar{x}$, соотношением

$$\bar{u} = e(u, \omega) = \sup\{t \mid t < u, X_t(\omega) \le \bar{x}\}.$$

(Так как $\bar{u} = e(u, \omega)$ не является временем остановки, с ним надо обращаться внимательно.) Для такого ω получим

$$X_u(\omega) \le X_0(\omega) + \int_0^{\bar{u}} \alpha(X_s(\omega))X_s(\omega)ds + K\int_0^u X_s(\omega)ds +$$

$$+ \left(\int_0^u \beta(X_s)X_s dB_s\right)(\omega).$$

Так как

$$\int_0^{e(u,\omega)} \alpha(X_s(\omega))X_s(\omega)ds = X_{e(u,\,\omega)}(\omega) - X_0(\omega) - \left(\int_0^t \beta(X_s)X_s dB_s\right)_{(t=e(u,\omega),\omega)},$$

выполняются следующие неравенства:

$$X_u(\omega) \le \bar{x} + K\int_0^u X_s(\omega)ds + 2\max_{0\le t\le u}\left|\left(\int_0^t \beta(X_s)X_s dB_s\right)(\omega)\right|,$$

$$X_u^2(\omega) \le 3\bar{x}^2 + 3K^2T\int_0^u X_s^2(\omega)ds + 12\max_{0\le t\le u}\left|\left(\int_0^t \beta(X_s)X_s dB_s\right)(\omega)\right|^2,$$

последнее из которых имеет место для ω' таких, что $X_u(\omega') \le \bar{x}$.

г) для любых N введем величины

$$\tau_N \equiv \inf\{t \mid X_t > N\} \wedge T, \;\; Y_u \equiv X_{u\wedge\tau_N}.$$

Тогда из последнего неравенства пункта в) будем иметь, что

$$Y_u^2 = X_{u\wedge\tau_N}^2 \le 3\bar{x}^2 + 3K^2T\int_0^{u\wedge\tau_N} X_s^2(\omega)ds + 12\max_{0\le t\le u\wedge\tau_N}\left|\int_0^t \beta(X_s)X_s dB_s\right|^2,$$

которое показывает, что упомянутое неравенство остается справедливым, когда X заменяется на Y. Кроме того, правая часть неравенства возрастает с увеличением u, что дает

$$\max_{s\le u} Y_s^2 \le 3\bar{x}^2 + 3K^2T\int_0^u Y_s^2 ds + 12\max_{0\le t\le u\wedge\tau_N}\left|\left(\int_0^t \beta(X_s)X_s dB_s\right)(\omega)\right|^2.$$

д) По неравенству Дуба имеем

$$E\left(\max_{0\le t\le u}\left|\int_0^t \beta(Y_s)Y_s dB_s\right|^2\right) \le 4E\left(\left(\int_0^u \beta(Y_s)Y_s dB_s\right)^2\right) \le 4K^2\int_0^u E[Y_s^2]ds.$$

Последнее неравенство следует из свойства изометрии и из неравенства $|\beta(x)| \le K$.

е) Таким образом, для $\varphi(u) \equiv E\{\max_{s\le u} Y_s^2\}$ получаем мажоранту

$$\varphi(u) \le 3\bar{x}^2 + 3TK^2\int_0^u E[Y_s^2]ds + 48K^2\int_0^u E[Y_s^2]ds.$$

Функция $\varphi(u)$ ограничена величиной N^2 и удовлетворяет неравенству

$$\varphi(u) \le 3\,\bar{x}^2 + (3TK^2 + 48K^2)\int_0^u \varphi(s)\,ds,$$

следовательно, по неравенству Гронволла

$$\varphi(u) \le 3\,\bar{x}^2 \exp\,\{(3TK^2 + 48K^2)u\},$$

т. е.

$$E\{\max_{s\le u} Y_s^2\} \le 3\,\bar{x}^2 \exp\,\{LT\},$$

где L не зависит от N.

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получим неравенство из пункта а), а значит, и утверждение теоремы.

Условие детерминированной зависимости (t, P_t) от (t, r_t)

Исследуем возможность представления процесса цены облигации просто как детерминированной функции процесса мгновенной процентной ставки. Оказывается, это эквивалентно наличию той же самой возможности для процесса «цены риска».

Предположение 5.13. Справедливы предположения 5.11 и 5.12.

Теорема 5.7. При предположении 5.13 можно выписать следующее представление процесса цены облигации:

$$P(u, T) = E\left[\exp\left(-\int_u^T r_s ds\right)\exp\left(\int_u^T q_s dB_s - \frac{1}{2}\int_u^T q_s^2 ds\right)\middle| F_u\right].$$

Если:

а) имеет место равенство $q_s(\omega) = \bar{q}\,(s, r_s(\omega))$ для некоторой измеримой функции $\bar{q} : [0, T] \times P_+ \to P$, тогда

б) существует измеримая функция h: $[0, T] \times P_+ \to P$ такая, что $P(u, T) = h(u, r_u)$.

Обратно, если б) имеет место, тогда

в) существует измеримая функция $\bar{q} : [0, T] \times P_+ \to P$ такая, что $q_s(\omega) = \bar{q}\,(s, r_s(\omega))$ на множестве (s, ω) с $\sigma_s(\omega) \ne 0$.

Доказательство а) $\to$ б). Из представления

$$P(u,\ T)\ = E\left[\exp\left(-\int_u^T r_s ds\right)\exp\left(\int_u^T \overline{q}(s,r_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_u^T \overline{q}^2(s,r_s)ds\right)\middle| F_u\right]$$

и из марковского свойства $(r_s)_{0 \le s \le T}$ можно получить

$$P(u,\ T)\ = E\left[\exp\left(-\int_u^T r_s ds\right)\exp\left(\int_u^T \overline{q}(s,r_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_u^T \overline{q}^2(s,r_s)ds\right)\middle| r_u\right] =$$

$$= h(u,\ r_u).$$

Доказательство б) $\to$ в). Из теоремы представления для функции дрейфа P (см. § 2) по мере $m \otimes P$ имеем

$$P_u\,\mu_u = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}E\left[P((u+\varepsilon)\wedge T, T) - P(u,T)\middle| F_u\right].$$

Так как $P((u + \varepsilon) \wedge T,\ T)$ является $r_{(u+\varepsilon)\wedge T}$ измеримым, марковское свойство $(r_u)_u$ гарантирует, что

$$P_u\,\mu_u = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}E\left[P((u+\varepsilon)\wedge T, T) - P(u,T)\middle| r_u\right],$$

которое дает $P_u\,\mu_u$ как детерминированную функцию $(u,\ r_u)$. Коэффициент диффузии σ_u идентифицируется коэффициентом дрейфа в $P_u e^{-r_u}$, равным по формуле Ито

$$e^{-r_u}P_u(\mu_u - a - b\sigma_u);$$

так как $q_u\sigma_u + \mu_u - r_u = 0$, из этого следует утверждение в).

Заметим, что функцию «цены риска» $\overline{q}$ можно рассматривать как функцию, отражающую поведение агента и гарантирующую жизнеспособность модели.

Процесс цены облигации как диффузия

Рассмотрим связь результатов гл. 5 с подходами, использующими обычный дифференциальный подход в финансовой экономике (см., например, Vasiček, 1977). Путем предположения о дифференцируемости *функции* «цены риска», изученной в предыдущем подразделе, математически выведем уравнение в частных производных, связывающее два процесса r и P.

Теорема 5.8. Если при предположении 5.13 в выражении процесса цены облигации в утверждении 5.1 (§ 2) функция q задается в форме

$$q_u = \overline{q}\,(u, r_u) \text{ – функция } \overline{q} \text{ пространства } C^{\infty} : (0, T) \times (0, \infty) \to P,$$

тогда:

а) существует функция из C^{∞} h: $(0, T) \times (0, \infty) \to P$ такая, что цена $P(u, T) = h(u, r_u)$;

б) функция h является решением параболического уравнения в частных производных

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (a + b\overline{q}\,)\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}\, b^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - x\,h = 0,$$

где $t \in (0, T)$, $x \in (0, \infty)$; a, b – коэффициенты диффузионного процесса $(r_t)_t$; $\overline{q}$ – функция цены риска;

в) имеется только одна «нейтральная к риску» вероятностная мера Q, для которой имеет место теорема 5.2; другими словами, множество S, определенное в § 2, имеет нулевую вероятностную меру $m \otimes P$. Более точно, $\sigma_s(\omega) > 0$ для всякой пары (s, ω);

г) процесс $(P(u, T))_{0 \le u \le T}$ сам является диффузионным и, следовательно, марковским процессом.

Доказательство. а), б). Для вероятностной меры $\overline{Q}$, где

$$d\overline{Q}/dP = \exp\left(\int_0^T \overline{q}(s, r_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \overline{q}^{\,2}(s, r_s)ds\right)$$

(см. § 2), имеем равенство $P(u, T) = E_{\overline{Q}}\left[\exp\left(-\int_u^T r_s ds\right)\middle| F_u\right]$ и $(r_t)_{0 \le u \le T}$ все еще является диффузионным процессом с новыми коэффициентами дрейфа и диффузии.

Как и в § 2 здесь мы используем теорему Гирсанова, которая гарантирует, что процесс $\widetilde{B}_u = B_u - \int_0^u \overline{q}(s, r_s)ds$ является броуновским движением при вероятностной мере $\overline{Q}$, и тогда имеем

$$dr_t = a\,dt + bdB_t = (a + b\overline{q}\,)\,dt + b\,d\,\widetilde{B}_t.$$

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\left(a+b\overline{q}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-xf=0,\ \ 0\le t\le T,\ x>0,$$

с условием, что для каждого $x > 0$, $\lim_{t\uparrow T} f\left(t,x\right)=1$. Так как a, b, $\overline{q}$ являются функциями t и x из C^{∞}, находим единственное решение h из C^{∞}, задаваемое формулой Фейнмана – Каца (см., например, Duffie 1992), как условное математическое ожидание $\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)$ при фиксированной ставке $r_t = x$, вычисленное по вероятностной мере, превращающей $dr = (a+b\overline{q})dt + b\, d\,\widetilde{B}$ в диффузионный процесс, т. е. по вероятностной мере $\overline{Q}$. Поэтому P идентифицируется как решение h рассматриваемого уравнения.

в) Формула Ито, примененная к $P(u, T) = h(u, r_u)$, дает

$$dP(u,T)=\left(\frac{\partial h}{\partial u}+a\,\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{2}\,b^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)du+b\,\frac{\partial h}{\partial x}\,dB_u,$$

которое показывает, что коэффициент диффузии в dP равен $b\,\partial h/\partial x$, отсюда условие $\sigma_u(\omega) \neq 0$ эквивалентно условию $\partial\, h(u, r_u(\omega))/\partial x \neq 0$. Докажем теперь, что $\partial h/\partial x < 0$ на $(0, T) \times (0, \infty)$ (результат, согласующийся с интуицией), и это будет гарантировать $\sigma_u > 0$ и единственность нейтральной к риску вероятностной меры Q.

в′) Сначала покажем, что $\partial h/\partial x \le 0$. Если r_s^x и r_s^y являются двумя решениями уравнения $dr_t = a\,dt + bdB_t$ такими, что $r_0^x = x$, $r_0^y = y$ и $x > y$, тогда результаты, вытекающие из невырожденности, показывают, что почти для всех ω имеет место неравенство $r_s^x(\omega) > r_s^y(\omega)$ для всех $s \le T$; интегральное представление цены $P(t, T)$ тогда обеспечивает, что $h(t, x) < h(t, y)$.

в″) Так как функция h является убывающей по x, $\partial h/\partial x = 0$ влечет, что $\partial^2 h/\partial x^2 = 0$ и $\partial^3 h/\partial x^3 \le 0$; вычисляя производные дифференциального уравнения в частных производных, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial t}+(a+b\overline{q})\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}-xh\right)=0,$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} + \frac{\partial(a + b\overline{q})}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial x} + (a + b\overline{q})\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} +$$

$$+\ \frac{1}{2}\frac{\partial(b^2)}{\partial t}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - h - x\frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

Для точки (t, x), в которой $\partial h/\partial x = 0$, получим

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - h = 0$$

и, следовательно, $\partial^2 h/\partial x\partial t > 0$. Отсюда при $\partial h(t,x)/\partial x = 0$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем, что $\partial h(t+\varepsilon, x)/\partial x > 0$, т. е. противоречие с результатом в'). Мы вынуждены принять, что $\partial h/\partial x < 0$ и поэтому Q определяется единственным образом.

г) Для любого t функция $x \to h(t, x)$ может быть инвертирована, т. е. существует $g(t, p)$ такая, что

$$g\ (t, h(t, x)) = x;$$

теорема о неявных функциях гарантирует, что g принадлежит C^∞, и можно записать

$$dP(t, T) = d\,h(t, r_t) = \overline{\mu}\,(t, P(t, T))\,dt + \overline{\sigma}\,(t, P(t, T))\,dB_t,$$

где $\overline{\mu}$ и $\overline{\sigma}$ являются функциями из C^∞. Таким образом, P следует диффузионному процессу и поэтому является марковским процессом.

Заметим, что мы могли бы получить $\overline{\mu}$ и $\overline{\sigma}$ в пункте г) и путем подстановки $x = g\ (t, p)$ по формуле Ито (см. начало пункта в)).

Строгая монотонность $h(t, x)$ по x уже доказывает марковский характер P, так как она гарантирует существование функции g, которая дает с точностью до множества меры нуль:

$$F_t = \sigma(P\ (u, T)|\ u \le t),\ \ \sigma(r_t) = \sigma(P(t, T)) \text{ для всех } t \le T.$$

ГЛАВА
6

МАРТИНГАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЦЕН ОПЦИОНОВ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭСШЕРА

§ 1. ПОНЯТИЕ О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЭСШЕРА

В настоящей главе при предположениях о постоянной безрисковой процентной ставке показано, как можно определять эквивалентные мартингальные меры для довольно широкого класса стохастических моделей изменений цен активов. В частности, всякое преобразование Эсшера стохастического процесса $\{X(t)\}$ приводит к эквивалентной вероятностной мере для этого процесса, а вектор параметров преобразования выбирается таким, чтобы эквивалентная вероятностная мера являлась также мартингальной мерой для дисконтированной стоимости каждого лежащего в основе актива. Цена ФП вычисляется как математическое ожидание дисконтированного платежа по эквивалентной мартингальной мере. Другими словами, после соответствующего изменения вероятностной меры цена каждой ЦБ является просто актуарной настоящей стоимостью.

Преобразование Ф. Эсшера (Esscher, 1932) является проверенным временем инструментом финансовой математики. Здесь будет показано, что преобразование Эсшера является также эффективным методом для определения стоимости производных ЦБ, если логарифмы цен первичных ЦБ управляются определенными стохастическими процессами со стационарными и независимыми приращениями. Это семейство процессов включает процессы Винера и Пуассона, гамма-процесс и обратный процесс Гаусса. Преобразование Эсшера такого процесса цены акции индуцирует на процессе эквивалентную вероятностную меру, когда параметр Эсшера или вектор таких параметров определяется так, чтобы дисконтированная цена каждой первичной ЦБ являлась мартингалом при новой вероятностной мере. Тогда цена любой ФП вычисляется просто как математическое ожидание (по эквивалентной мартингальной мере) дисконтированных платежей. Прямые следствия метода преобразований Эсшера включают, среди прочего, знаменитую формулу Блэка – Шоулса для определения цены опциона, известную биномиальную формулу цены опциона, формулы для определения цены опционов по максимуму и минимуму многократных рисковых активов и др.

Для плотности вероятностей $f(x)$ пусть h будет вещественным числом таким, что существует

$$M(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{hx} f(x)\,dx.$$

Функция переменной x

$$f(x;h) = e^{hx} f(x) / M(h)$$

является плотностью вероятностей, и ее естественно назвать преобразованием Эсшера первоначального распределения с параметром h.

Преобразование Эсшера было разработано для аппроксимации распределения суммы совокупных выплат в окрестности точки x_0 путем аналитических приближений рядами Эджворта к преобразованному распределению с параметром h, выбираемым так, чтобы новое среднее было равно x_0. Когда преобразование Эсшера используется в задачах страхования для вычисления стоп-лосс премии, параметр h обычно находят путем определения среднего для преобразованного распределения как предела удержания.

Покажем, что преобразование Эсшера можно легко распространить на некоторые классы случайных процессов, которые включают некоторые из обычно используемых для моделирования изменений цен акций. Параметр h определяется так, чтобы модифицированная вероятностная мера была эквивалентной мартингальной мерой, по отношению к которой цены активов оказываются ожидаемыми дисконтированными платежами.

В качестве удачного применения метода преобразования Эсшера ниже выведена формула (6.10), которая является общим выражением для стоимости европейского опциона-колл на не выплачивающую дивиденды акцию. Как частный случай из нее получается формула Блэка – Шоулса для определения цены опциона, а также известные формулы для стоимости опциона с чистым скачком, биномиальная формула цены опциона и др. Из нее также следуют формулы для нетрадиционных моделей поведения цены акции таких, как гамма-процесс и обратный гауссовский процесс.

После этого метод преобразований Эсшера распространяется на случай определения стоимости ФП на пакеты рисковых активов. Основная схема анализа здесь следующая. Предположим, что свободная от риска процентная ставка является постоянной и обозначается через r. Пусть для $t \geq 0$ $S_1(t), S_2(t),\ldots, S_n(t)$ обозначают цены n не выплачивающих дивидендов акций или активов в момент t. Предположим, что вектор

$$\left(\ln\frac{S_1(t)}{S_1(0)}, \ln\frac{S_2(t)}{S_2(0)},..., \ln\frac{S_n(t)}{S_n(0)}\right)^T$$

управляется стохастическим процессом, который имеет независимые и стационарные приращения, непрерывным по вероятности. Пусть g будет измеримой вещественной функцией n переменных. Тогда для $\tau \geq 0$

$$E^*[e^{-\delta\tau} S_j(\tau)\, g\, (S_1(\tau), S_2(\tau),\ldots, S_n(\tau))] =$$

$$= S_j(0)\, E^{**}[g\, (S_1(\tau), S_2(\tau),\ldots, S_n(\tau))],$$

где математическое ожидание в левой части вычисляется по нейтральному к риску преобразованию Эсшера, а математическое ожидание в правой части – по другому определенному преобразованию Эсшера. Будет показано, что многие классические формулы определения цен опционов являются прямыми следствиями этого результата.

Повсюду в этой главе безрисковая процентная ставка предполагается постоянной. Также предполагаем, что рынок является безынерционным и торговля производится непрерывно. Не имеется налогов, расходов на сделки и никаких ограничений на займы или короткие продажи. Все ЦБ совершенно делимы. Из результатов предыдущих глав понятно, что в такой модели рынка ЦБ отсутствие арбитража, по существу, эквивалентно существованию эквивалентной мартингальной меры, по отношению к которой цена случайного платежа является ожидаемой дисконтированной стоимостью. Некоторые авторы называют этот результат «*фундаментальной теоремой определения цены актива*». В общей постановке эквивалентная мартингальная мера не единственная. Преимущество нейтрального к риску преобразования Эсшера в том, что оно обеспечивает общее, прозрачное и однозначное решение. Далее мы используем некоторые основные идеи из теории стохастических процессов.

§ 2. НЕЙТРАЛЬНОЕ К РИСКУ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭСШЕРА

Для $t \geq 0$ символ $S(t)$ будет обозначать цену не выплачивающей дивиденды акции или ценной бумаги в момент t. Предполагаем, что имеется стохастический процесс $\{X(t), t \geq 0\}$, $X(0) = 0$, со стационарными и независимыми приращениями такой, что

$$S(t) = S(0)\exp\{X(t)\}, \qquad t \geq 0. \tag{6.1}$$

Для каждого t случайная величина $X(t)$, которую можно интерпретировать как непрерывно конвертируемую ставку доходности по t периодам, имеет неограниченно делимое распределение. Пусть

$$F(x, t) = \text{prob}\,[X(t) \leq x]$$

будет ее функция распределения, а

$$M(z, t) = E[\exp\{z\,X(t)\}]$$

является производящей функцией моментов (ПФМ). Путем предположения, что $M(z, t)$ – непрерывная в точке $t = 0$, можно доказать, что

$$M(z, t) = [M(z, 1)]^t. \tag{6.2}$$

Предположим, что (6.2) имеет место.

Для простоты примем, что случайная величина $X(t)$ имеет плотность

$$f(x,t) = \frac{dF(x,t)}{dx}, \qquad t > 0,$$

тогда

$$M(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} f(x,\,t)\,dx.$$

Пусть h – вещественное число, для которого существует ПФМ $M(h, t)$. Из равенства (6.2) следует, что если $M(h, t)$ существует для одного положительного числа t, то она существует для всех положительных t. Теперь введем преобразование Эсшера с параметром h для процесса $\{X(t)\}$. Оно также является процессом со стационарными и независимыми приращениями, а новая плотность вероятностей процесса $X(t)$, $t > 0$, равна

$$f(x, t; h) = \frac{e^{hx} f(x, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} f(y, t) dy} = \frac{e^{hx} f(x, t)}{M(h, t)}. \tag{6.3}$$

Это означает, что модифицированное распределение $X(t)$ является преобразованием Эсшера от первоначального распределения. Соответствующая ПФМ

$$M(z,t; h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} f(x, t; h)\, dx = \frac{M(z+h, t)}{M(h, t)}. \tag{6.4}$$

Из равенства (6.2) имеем

$$M(z, t; h) = [M(z, 1; h)]^t. \tag{6.5}$$

Преобразование Эсшера скалярной *случайной величины* – хорошо известное понятие в литературе по теории риска. Здесь мы рассматриваем преобразование Эсшера *случайного процесса*. Другими словами, вероятностная мера процесса модифицируется. Поскольку экспоненциальная функция положительная, модифицированная вероятностная мера будет *эквивалентной* по отношению к первоначальной вероятностной мере; т. е. обе вероятностные меры имеют одни и те же множества меры нуль.

Мы хотим гарантировать, чтобы цены акций в модели были внутренне состоятельными. Поэтому ищем $h = h^*$ такое, чтобы процесс дисконтированной цены акции $\{S(t)\exp(-rt),\ t \ge 0\}$ являлся мартингалом по отношению к вероятностной мере, соответствующей значению параметра h^*. В частности,

$$S(0) = E^*[S(t) \exp(-rt)] = E^*[S(t)] \exp(-rt),$$

где r обозначает постоянную безрисковую процентную ставку.

Из равенства (6.1) видно, что параметр h^* является решением уравнения

$$1 = E^*[e^{X(t)}] \exp(-rt),$$

или

$$\exp(rt) = M(1, t; h^*). \tag{6.6}$$

Из равенства (6.5) видим, что решение не зависит от t, и мы можем положить $t = 1$:

$$\exp(rt) = M(1, 1; h^*), \tag{6.7}$$

или

$$r = \ln [M(1, 1; h^*)]. \tag{6.8}$$

Можно показать, что параметр h^* является единственным. Доказательство этого будет приведено позже для более общего случая. Назовем преобразование Эсшера с параметром h^* *нейтральным к риску преобразованием Эсшера*, а соответствующую эквивалентную мартингальную меру – *нейтральной к риску мерой Эсшера*. Заметим, что хотя нейтральная к риску мера Эсшера единственная, эквивалентные мартингальные меры могут быть и другими.

Чтобы определить стоимость производной ценной бумаги (чьи будущие платежи зависят от эволюции цены акции), вычислим ожидаемую дисконтированную стоимость подразумеваемых платежей; ожидание берется по нейтральной к риску мере Эсшера. Рассмотрим европейский опцион-колл на акцию с ценой исполнения K и датой исполнения τ, $\tau > 0$. Стоимость опциона в момент времени 0 равна

$$E^* [(S(\tau) - K)_+ \exp (-rt)] , \tag{6.9}$$

где $x_+ = x$, если $x > 0$, и $x_+ = 0$, если $x \le 0$.

Если определить

$$k = \ln[K / S(0)] ,$$

выражение (6.9) приобретает вид

$$e^{-r\tau}\int_k^{\infty}[S(0)e^x - K]\, f(x, \tau;\, h^*)dx =$$

$$= e^{-r\tau}S(0)\int_k^{\infty} e^x\, f(x, \tau;\, h^*)\, dx - e^{-r\tau}K[1 - F(k, \tau; h^*)].$$

Из соотношений (6.3), (6.4) и (6.6) следует, что

$$e^x\, f(x, \tau;\, h^*) = \frac{f(x, \tau) \times \exp\{(h^* + 1)x\}}{M(h^*, \tau)} = \frac{M(h^* + 1, \tau)}{M(h^*, \tau)} f(x, \tau;\, h^* + 1) =$$

$$= M(1, \tau\,;\, h^*) f(x, \tau\,;\, h^* + 1) = e^{r\tau} f(x, \tau;\, h^* + 1).$$

Таким образом, стоимость европейского опциона-колл с ценой исполнения K и датой исполнения τ равна

$$S(0)[1 - F(k, \tau; h^* + 1)] - e^{-r\tau}K[1 - F(k, \tau; h^*)]. \qquad (6.10)$$

В дальнейшем эту общую формулу будем применять неоднократно. Будет показано, что формула (6.10) содержит, среди других, как частный случай знаменитую формулу Блэка – Шоулса для определения цены опционов.

В общем случае, когда функция распределения $F(x, t)$ не обязательно дифференцируема, можно определить преобразование Эсшера через интегралы Стильтьеса, т. е. заменить равенство (6.3) на

$$dF(x, t; h) = \frac{e^{hx} dF(x, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} dF(y, t)} = \frac{e^{hx} dF(x, t)}{M(h, t)}. \qquad (6.11)$$

(В своей статье Ф. Эсшер (Esscher, 1932) не предполагал, что функция распределения суммы индивидуальных выплат является дифференцируемой.) После такой замены формула (6.10) остается справедливой.

То, что условие отсутствия арбитража тесно связано с существованием эквивалентной мартингальной меры, было доказано ранее в главах 3 и 4. Эти результаты реализуют идею нейтрального к риску определения стоимости, использовавшуюся во второй части гл. 2. Более детально эти вопросы рассмотрены в книге Д. Даффи (Duffie, 1992). В модели дискретного времени отсутствие арбитражных возможностей эквивалентно существованию эквивалентной мартингальной меры. В более общей постановке характеризация более тонкая, и для строгости следовало бы заменить термин «эквивалентная» на «по существу эквивалентная».

Заметим, что формулу определения цены опциона (6.10) можно написать как

$$S(0) \text{ prob } [S(\tau) > K; h^* + 1] - e^{-r\tau}K \text{ prob } [S(\tau) > K; h^*].$$

где первая вероятность оценивается по мере преобразования Эсшера с параметром $h^* + 1$, в то время как вторая вероятность вычисляется по отношению к нейтральному к риску преобразованию Эсшера. Обобщение этого результата дается в § 4.

Чтобы построить стохастический процесс $\{X(t),\ t \ge 0\}$ со стационарными и независимыми приращениями, $X(0) = 0$ и ПФМ

$$M(z, t) = [M(z, 1)]^t,$$

можно применить следующую теорему: для заданной производящей функции моментов $\xi(z)$ безгранично делимого распределения имеется единственный стохастический процесс $\{W(t)\}$ со стационарными и независимыми приращениями, $W(0) = 0$, такой, что

$$E[e^{zW(t)}] = [\xi(z)]^t.$$

Нормальное распределение, распределение Пуассона, гамма-распределение и обратное распределение Гаусса являются четырьмя примерами безгранично делимых распределений. Далее рассмотрим моделирование такими процессами изменений цен акций.

§ 3. ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЦЕН ОПЦИОНОВ

Результаты § 2 применим для получения формул для стоимости европейского опциона в трех классических моделях изменения цены акций. Эти три формулы общеизвестны и их можно найти в учебниках по финансовой математике.

Затем рассмотрим две нетрадиционных модели с изменением цены акций в непрерывном времени. Аналогично чисто скачкообразной модели здесь предполагается, что

$$S(t) = S(0)\, e^{X(t)} = S(0)\, e^{Y(t) - ct},$$

где c является константой.

Случайный процесс $\{Y(t)\}$ в первой модели является гамма-процессом, а во второй модели – обратным гауссовским процессом. Эти два случайных процесса использовались в моделях совокупных страховых выплат. Напомним, что в чисто скачкообразной модели все скачки имеют одну и ту же величину. Однако в рассмотренных моделях этого не предполагается.

Логарифм цены акции как винеровский процесс

Сделаем классическое предположение, что цены акций распределены логарифмически нормально. Стохастический процесс $\{X(t)\}$ будет процессом Винера со средним значением за единицу времени равным μ и дисперсией за единицу времени σ^2. Пусть $N(x; \mu, \sigma^2)$ обозначает нормальную функцию распределения со средним μ и дисперсией σ^2. Тогда

$$F(x, t) = N(x; \mu t, \sigma^2 t)$$

и

$$M(z, t) = \exp\{(\mu z + \sigma^2 z^2/2)t\}.$$

Из представления (6.4) следует, что

$$M(z, t; h) = \exp\{[(\mu + h\sigma^2) z + \sigma^2 z^2/2]t\}.$$

Значит, преобразование Эсшера (с параметром h) винеровского процесса является опять винеровским процессом с модифицированным средним за единицу времени $(\mu + h\sigma^2)$ и прежней дисперсией за единицу времени σ^2. Таким образом,

$$F(x, t; h) = N(x; (\mu + h\sigma^2)t, \sigma^2 t).$$

Из уравнения (6.8) получаем

$$r = (\mu + h^*\sigma^2) + \sigma^2/2.$$

Следовательно, преобразованный процесс имеет среднее за единицу времени

$$\mu^* = \mu + h^*\sigma^2 = r - (\sigma^2/2).$$

Теперь из формулы (6.10) следует, что стоимость европейского опциона-колл равна

$$S(0)[1 - N(k; (\mu^* + \sigma^2)\tau, \sigma^2\tau)] - e^{-r\tau} K [1 - N(k; \mu^*\tau, \sigma^2\tau)] =$$

$$= S(0)[1 - N(k; (r + \sigma^2/2)\tau, \sigma^2\tau)] - e^{-r\tau} K [1 - N(k; (r - \sigma^2/2)\tau, \sigma^2\tau)].$$

Через функцию стандартного нормального распределения Φ этот результат можно выразить как

$$S(0)\Phi\left(\frac{-k + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - e^{-r\tau} K \Phi\left(\frac{-k + (r - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \quad (6.12)$$

что является классической формулой Блэка – Шоулса для определения цены опциона. Заметим, что μ в формуле (6.12) не появилось.

Логарифм цены акции как сдвинутый процесс Пуассона

В качестве следующей рассмотрим так называемую чисто скачкообразную модель. Определение цены опционов на акции с таким стохастическим поведением было рассмотрено в гл. 2; однако там не получена формула для цены опциона. Эта формула обычно получается как предельный случай биномиальной формулы определения цены опциона, которую выведем позже.

Здесь же предположим, что

$$X(t) = kN(t) - ct,$$

где $\{N(t)\}$ – процесс Пуассона с параметром λ, а k и c – положительные константы.

Пусть

$$\Lambda(x;\,\theta) = \sum_{0 \le j \le x} \frac{\theta^j}{j!} e^{-\theta}$$

является пуассоновским распределением с параметром θ. Тогда функция распределения $X(t)$

$$F(x,\,t) = \Lambda\left(\frac{x + ct}{k};\,\lambda t\right).$$

Так как

$$E\,[e^{z\,N(t)}] = \exp\{\lambda t\,(e^{z} - 1)\},$$

имеем

$$M(z,\,t) = E[e^{z\,(N\,(t)\,-\,c\,t)}] = \exp\{(\lambda\,(e^{zk} - 1) - cz)\,t\},$$

откуда получаем

$$M(z,\,t;\,h) = \exp\{(\lambda e^{hk}(e^{zk} - 1) - cz)\,t\}.$$

Следовательно, преобразование Эсшера с параметром h сдвинутого процесса Пуассона – снова сдвинутый процесс Пуассона с модифицированным параметром Пуассона $\lambda e^{\,hk}$. Формула (6.8) является условием того, что

$$r = \lambda e^{h^* k}(e^{k} - 1) - c.$$

Таким образом, стоимость ФП определяется согласно модифицированному пуассоновскому параметру

$$\lambda^* = \lambda e^{h^* k} = (r + c)/(e^k - 1).$$

Например, цена европейского опциона-колл согласно формуле (6.10) имеет вид

$$S(0)\left[1 - \Lambda\left(\frac{k + c\tau}{k};\ \lambda^* e^k \tau\right)\right] - Ke^{-r\tau}\left[1 - \Lambda\left(\frac{k + c\tau}{k};\ \lambda^* \tau\right)\right]. \quad (6.13)$$

Формулу (6.13) можно найти в учебниках, однако использование преобразования Эсшера значительно упрощает ее вывод. Заметим, что пуассоновский параметр λ в выражении (6.13) не присутствует.

Логарифм цены акции как случайное блуждание

Очень популярной моделью для определения цены опциона является биномиальная модель, которая является моделью дискретного времени. Хотя в этой главе рассматриваются модели непрерывного времени, ввиду важности биномиальной модели можно отклониться от него и получить биномиальную формулу определения цены опциона для дискретного времени методом преобразования Эсшера.

Предположим, что цена акции

$$S(t) = S(0)\, e^{X(t)}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

является стохастическим процессом с дискретным временем. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин. Определим $X(0) = 0$ и для $t = 1, 2, \ldots, \tau$

$$X(t) = X_1 + X_2 + \ldots + X_t.$$

Пусть Ω обозначает множество точек, в которых X_j имеет положительную вероятность. Предположим, что множество Ω конечное и состоит более чем из одной точки; пусть a будет его наименьшим элементом, а b – наибольшим. Чтобы избежать арбитража, положим $a < r < b$. Предположим, что $\{S(t)\}$ является мультипликативным биномиальным процессом, то есть, что Ω состоит только из двух элементов: $\Omega = \{a, b\}$. Предположим, что

$$\text{prob}\,\{X_j = b\} = p \quad \text{и} \quad \text{prob}\,\{X_j = a\} = 1 - p.$$

Пусть

$$B(x;\, n,\, \theta) = \sum_{0 \le j \le x} \binom{n}{j} \theta^j (1-\theta)^{n-j}$$

обозначает биномиальную функцию распределения с параметрами n и θ. Тогда функцией распределения случайной величины $X(t)$ является

$$F(x,\, t) = \text{prob}\left(\sum_{j=1}^{t} X_j \le x\right) = B\left(\frac{x - at}{b - a};\, t,\, p\right).$$

Так как

$$M(z,\, t) = E[e^{zX(t)}] = [(1-p)\, e^{az} + p\, e^{bz}]^{\,t},$$

имеем

$$M(z,\, t;\, h) = M(z + h,\, t)\, /\, M(h,\, t) = \{[1 - \pi\,(h)]\, e^{az} + \pi(h)\, e^{bz}\}^t,$$

где

$$\pi(h) = \frac{pe^{bh}}{(1-p)\, e^{ah} + pe^{bh}}\,.$$

Формула (6.7) является условием того, что

$$e^{\,r} = [1 - \pi\,(h^*)]\; e^{\,a} + \pi\,(h^*)\; e^{\,b},$$

из которого следует, что

$$\pi(h^*) = \frac{e^r - e^a}{e^b - e^a}\,.$$

Согласно формуле (6.10) стоимость европейского опциона-колл с ценой исполнения K и датой исполнения τ равна

$$S(0)\left[1 - B\left(\frac{k - a\tau}{b - a};\, \tau,\, \pi(h^* + 1)\right)\right] - Ke^{-r\tau}\left[1 - B\left(\frac{k - a\tau}{b - a};\, \tau,\, \pi(h^*)\right)\right],$$

где

$$\pi(h^* + 1) = \frac{e^b}{[1 - \pi(h^*)]e^a + \pi(h^*)\, e^b} = \pi(h^*)\, e^{b - r}.$$

Заметим, что при определении цены опциона нет необходимости знать вероятность p, так как она заменяется $\pi(h^*)$.

Логарифм цены акции как сдвинутый гамма-процесс

Предположим, что

$$X(t) = Y(t) - ct,$$

где $\{Y(t)\}$ является гамма-процессом с параметрами α и β, а положительная константа c будет третьим параметром. Пусть $G(x;\ \alpha, \beta)$ обозначает гамма-распределение с параметром формы α и параметром масштаба β

$$G(x;\ \alpha, \beta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-\beta y} dy, \quad x \geq 0.$$

Тогда

$$F(x, t) = G(x + ct;\ \alpha t, \beta) \tag{6.14}$$

и

$$M(z, t) = \left(\frac{\beta}{\beta - z} \right)^{\alpha t} e^{-ctz}, \qquad z < \beta.$$

Следовательно,

$$M(z, t;\ h) = \left(\frac{\beta - h}{\beta - h - z} \right)^{\alpha t} e^{-ctz}, \qquad z < \beta - h,$$

которое показывает, что преобразованный процесс принадлежит к тому же самому типу с параметром β, замененным на $\beta - h$. Формула (6.7) означает, что

$$e^{r} = \left(\frac{\beta - h^*}{\beta - h^* - 1} \right)^{\alpha} e^{-c}.$$

Определим $\beta^* = \beta - h^*$. Тогда из (6.14) следует, что

$$\beta^* = 1 \big/ \left(1 - e^{-(c+r)/\alpha}\right). \tag{6.15}$$

Согласно формулам (6.10) и (6.14), стоимость европейского опциона-колл равна

$$S(0)[1 - G(k + c\tau;\ \alpha\tau, \beta^* - 1)] - Ke^{-r}[1 - G(k + c\tau;\ \alpha\tau, \beta^*)]. \tag{6.16}$$

Заметим, что параметр масштаба β в выражениях (6.15) и (6.16) не появляется.

Логарифм цены акции как сдвинутый обратный гауссовский процесс

Предположим, что $X(t) = Y(t) - ct$, но $\{Y(t)\}$ теперь является обратным гауссовским процессом с параметрами a и b. Пусть $J(x; a, b)$ обозначает функцию распределения обратного гауссовского процесса

$$J(x; a, b) = \Phi\left(\frac{-a}{\sqrt{2x}} + \sqrt{2bx}\right) + e^{2a\sqrt{b}}\Phi\left(\frac{-a}{\sqrt{2x}} - \sqrt{2bx}\right), \quad x > 0,$$

где Φ является стандартной нормальной функцией распределения;

$$F(x, t) = J(x + ct; at, b).$$

(Подробное описание обратного гауссовского распределения имеется в книге H. Panjer, G. Willmot, 1992).

Так как ПФМ обратного гауссовского распределения равна

$$e^{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{b-z}\right)}, \qquad z < b,$$

имеем

$$M(z, t) = e^{at\left(\sqrt{b}-\sqrt{b-z}\right)-ctz}, \quad z < b.$$

Поэтому

$$M(z, t; h) = e^{at\left(\sqrt{b-h}-\sqrt{b-h-z}\right)-ctz}, \quad z < b - h,$$

откуда видно, что преобразованный процесс снова принадлежит к типу исходного с заменой параметра b на $b - h$. Формула (6.8) приводит к условию $r = a\left(\sqrt{b-h^*} - \sqrt{b-h^*-1}\right) - c$. Записывая $b^* = b - h^*$, мы имеем

$$\sqrt{b^*} - \sqrt{b^*-1} = \frac{c+r}{a}, \tag{6.17}$$

что может рассматриваться как уравнение относительно b^*. Из формулы (6.10) следует, что стоимость европейского опциона-колл с ценой исполнения K и датой истечения τ равна

$$S(0)[1 - J(k + c\tau; a\tau, b^* - 1)] - Ke^{-r}[1 - J(k + c\tau; a\tau, b^*)]. \tag{6.18}$$

Заметим, что параметр b не присутствует в выражениях (6.17) и (6.18).

§ 4. ОПЦИОНЫ НА НЕСКОЛЬКО РИСКОВЫХ АКТИВОВ

Обобщим метод преобразования Эсшера для определения цены финансовых производных совокупности рисковых активов или объединения (пула) активов. В финансовой литературе эта тематика считается важной. Очевидным применением таких результатов являются портфели страхования или конструирование стратегий хеджирования для защиты портфелей активов от потерь. Другие применения: определение стоимости обязательств, включающих одну или более иностранных валют; определение цены опционов на фьючерсы облигаций; пенсионные фонды с пособиями, связанными с несколькими альтернативами. Двумя альтернативами являются обычно совокупность последней (или средней) зарплаты и накопленные взносы. Конструкция такого пособия предусматривает для плановых участников выбор максимального из двух случайных сумм пособий.

Пусть $S_1(t), S_2(t),\ldots, S_n(t)$ обозначают цены акций или активов в момент времени t для $t \geq 0$, не предусматривающих дивиденды. Запишем

$$X_j(t) = \ln[S_j(t)/S_j(0)], \quad j = 1, 2,\ldots, n,$$

и

$$X(t) = (X_1(t), X_2(t),\ldots, X_n(t))^{\mathrm{T}}.$$

Пусть R^n обозначает множество векторов-столбцов с n вещественными компонентами. Пусть

$$F(x, t) = \mathrm{prob}\,\{X(t) \leq x\}, \qquad x \in \mathrm{R}^n,$$

является функцией распределения случайного вектора $X(t)$, а

$$M(z, t) = E[\exp\{z^{\mathrm{T}}X(t)\}], \qquad z \in \mathrm{R}^n,$$

ее ПФМ. Предположим, что $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ – случайный процесс с независимыми и стационарными приращениями и что

$$M(z, t) = [M(z, 1)]^t, \quad t \geq 0.$$

Для простоты также предположим, что случайный вектор $X(t)$ имеет плотность вероятностей

$$f(x,\, t) = \frac{\partial^n F(x,\, t)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}, \quad t \geq 0.$$

Тогда модифицированная плотность вероятностей процесса $X(t)$ после преобразования Эсшера с параметром h имеет вид

$$f(x,\, t;\, h) = \frac{e^{h^{\mathrm{T}} x} f(x,\, t)}{M(h,\, t)},$$

а соответствующая ПФМ

$$M(z, t; h) = M(z + h, t)/\, M(h, t).$$

Преобразование Эсшера (с вектором параметров h) процесса $X(t)$ является снова процессом со стационарными и независимыми приращениями и

$$M(z, t; h) = [M(z, 1; h)]^{t}, \quad t \geq 0. \tag{6.19}$$

В общем случае, когда плотность вероятностей $f(x, t)$ может не существовать, определим преобразование Эсшера в терминах интегралов Стильтьеса, как мы сделали в представлении (6.11).

Вектор параметров преобразования $h = h^*$ определим так, чтобы для $j = 1, 2,\ldots, n$ процесс

$$(e^{-rt} S_j(t))_{t \geq 0}$$

был мартингалом по отношению к модифицированной вероятностной мере. В частности,

$$S_j(0) = E[e^{-rt} S_j(t); h^*], \quad t \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.20}$$

(Заметим, что эти условия не зависят от t.) Стоимость ФП вычисляется как математическое ожидание по модифицированной вероятностной мере от дисконтированной стоимости ее платежей.

Определим

$$\mathbf{1}_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^n,$$

где 1 в этом векторе-столбце $\mathbf{1}_j$ стоит на j-м месте.

Формулы (6.20) с учетом (6.19) преобразуются к виду

$$e^{rt} = M(\mathbf{1}_j, t; h^*) = [M(\mathbf{1}_j, 1; h^*)]^{t}, \quad t \geq 0,\ j = 1, 2,\ldots, n.$$

Основной результат этого параграфа следующий.

Теорема 6.1. Пусть g является вещественной измеримой функцией n переменных. Тогда для каждого положительного t

$$E[e^{-rt}S_j(t)g\left(S_1(t),...,S_n(t)\right);\ h^*]=$$

$$=S_j(0)\,E[g\left(S_1(t),...,S_n(t)\right); h^*+\mathbf{1}_j]. \qquad (6.21)$$

Доказательство. Оно следует такой же схеме рассуждений, которая использовалась при получении формулы (6.10) для европейского опциона-колл. Математическое ожидание в левой части равенства (6.21) получается путем интегрирования

$$e^{-rt}S_j(0)e^{x_j}g\left(S_1(0)\,e^{x_1},...,S_n(0)\,e^{x_n}\right)f\left(x,\ t;\ h^*\right)$$

по x по всему R^n.

Так как

$$e^{x_j}f\left(x,\ t;\ h^*\right)=\exp[(h^*+\mathbf{1}_j)^{\mathrm{T}}x]\,f\left(x,\ t\right)/M\left(h^*,\ t\right)=$$

$$=\ \frac{M\left(h^*+\mathbf{1}_j,t\right)}{M\left(h^*,\ t\right)}f\left(x,\ t;\ h^*+\mathbf{1}_j\right)\ =$$

$$=\ M(\mathbf{1}_j,\ t;\ h^*)\,f\,(x,\ t;\ h^*+\mathbf{1}_j)=e^{rt}f\left(x,\ t;\ h^*+\mathbf{1}_j\right),$$

откуда и следует результат.

Имеется другой способ доказательства теоремы. Для векторного параметра $k=(k_1,\ \dots\ ,k_n)^{\mathrm{T}}$ запишем $S(t)^k=S_1(t)^{k_1}...\,S_n(t)^{k_n}$. Тогда

$$E[S(t)^k\,g\left(S(t)\right);h]=\frac{E[S(t)^k\,g\left(S(t)\right)e^{h^{\mathrm{T}}X(t)}]}{E[e^{h^{\mathrm{T}}X(t)}]}\ =$$

$$=\frac{E[S(t)^k\,g\left(S(t)\right)S(t)^h]}{E[S(t)^h]}=\frac{E[S(t)^{k+h}]}{E[S(t)^h]}\times\frac{E[g\left(S(t)\right)S(t)^{k+h}]}{E[S(t)^{k+h}]}=$$

$$=\ E[S(t)^k;\ h]\times E[g\ (S(t));\ k+h].$$

Теперь теорема следует из этой формулы факторизации (при $h = h^*$ и $k = \mathbf{1}_j$) и равенства (6.20).

Одним из первых результатов, обобщающих формулу Блэка – Шоулса для определения цены финансовых производных на более чем один рисковый актив является результат У. Маргрейба (Margrabe, 1978). В предположении, что цены активов – это геометрические броуновские движения, им получена явная формула для стоимости опциона для обмена одного рискового актива на другой в конце фиксированного периода. Другими словами, определена стоимость в момент времени 0 контракта, по которому в момент времени τ выплачиваются платежи, стоимость которых равна $[S_1(\tau) - S_2(\tau)]_+$.

Следствие 6.1. Стоимость в момент времени 0 опциона для обмена $S_2(\tau)$ на $S_1(\tau)$ в момент времени τ равна

$$S_1(0)\ \mathrm{prob}\ \{ S_1(\tau) > S_2(\tau);\ h^* + \mathbf{1}_1\} - S_2(0)\ \mathrm{prob}\ \{ S_1(\tau) > S_2(\tau);\ h^* + \mathbf{1}_2\}.$$

Доказательство. Стоимость опциона в момент 0 равна

$$E(e^{-r\tau}[S_1(\tau) - S_2(\tau)]_+;\ h^*).$$

Пусть $I(A)$ обозначает индикаторную функцию случайного события A. Тогда

$$[S_1(\tau) - S_2(\tau)]_+ = [S_1(\tau) - S_2(\tau)] \times I\,[S_1(\tau) > S_2(\tau)] =$$

$$= S_1(\tau) \times I\,[S_1(\tau) > S_2(\tau)] - S_2(\tau) \times I\,[S_1(\tau) > S_2(\tau)].$$

Таким образом, по теореме 6.1

$$E(e^{-r\tau}[S_1(\tau) - S_2(\tau)]_+;\ h^*) =$$

$$= E(e^{-r\tau} S_1(\tau) I\,[S_1(\tau) > S_2(\tau)];\ h^*) - E(e^{-r\tau} S_2(\tau) I\,[S_1(\tau) > S_2(\tau)];\ h^*) =$$

$$= S_1(0) E\,(I\,[S_1(\tau) > S_2(\tau)];\ h^* + \mathbf{1}_1) - S_2(0) E\,(I\,[S_1(\tau) > S_2(\tau)];\ h^* + \mathbf{1}_2).$$

Так как $E(I\,[A]) = \mathrm{prob}\ (A)$, следствие доказано.

В § 5 рассмотрим предположение о геометрическом броуновском движении и покажем, что формула Маргрейба немедленно следует из следствия 6.1. Теперь дадим другой способ получения формулы (6.10) для европейского опциона-колл.

Следствие 6.2. Формула (6.10) имеет место.

Доказательство. Рассмотрим случай $n = 2$ при $S_1(t) = S(t)$ и $S_2(t) = Ke^{r(t-\tau)}$. Тогда

$$E^*(e^{-r\tau}[S(\tau) - K]_+) = E(e^{-r\tau}[S_1(\tau) - S_2(\tau)]_+; h^*) =$$

$$= S_1(0) \operatorname{prob}([S_1(\tau) > S_2(\tau)]; h^* + \mathbf{1}_1) -$$

$$- S_2(0) \operatorname{prob}([S_1(\tau) > S_2(\tau)]; h^* + \mathbf{1}_2) =$$

$$= S(0) \operatorname{prob}([S(\tau) > K]; h^* + 1) - e^{-r\tau} K \operatorname{prob}([S(\tau) > K]; h^*) =$$

$$= S(0)\{1 - \operatorname{prob}([S(\tau) \le K]; h^* + 1)\} - e^{-r\tau} K\{1 - \operatorname{prob}([S(\tau) \le K]; h^*)\},$$

что и является формулой (6.10).

Результат Маргрейба был обобщен Р. Шталцем (Stulz, 1982), где также предполагалось, что цены активов являются геометрическими броуновскими движениями. Путем сложных вычислений Шталц получил формулы для определения стоимости опционов на максимум и минимум двух рисковых активов; т. е., он нашел стоимость в момент времени 0 контракта с платежом в момент времени τ, равным

$$(\max[S_1(\tau), S_2(\tau)] - K)_+,$$

и стоимость в момент 0 контракта с выплатой в момент времени τ

$$(\min[S_1(\tau), S_2(\tau)] - K)_+ .$$

Эти две формулы Шталца были обобщены на случай n рисковых активов Г. Джонсоном (Johnson, 1987). На самом деле, можно спросить: сколько следует заплатить в момент времени 0, чтобы получить наибольшую из стоимостей двух активов в момент времени τ? Наибольшую из стоимостей трех активов? Наибольшую из стоимостей k активов? В более общем случае, какова стоимость европейского опциона-колл на наибольшую из стоимостей k активов в момент τ с ценой исполнения K? Заметим снова, упомянутые авторы предполагали, что цены активов являются геометрическими броуновскими движениями.

Для фиксированного времени τ, $\tau > 0$, обозначим через S множество, состоящее из случайных величин $\{S_j(\tau); j = 1, 2, \ldots, n\}$. Пусть $S_{[k]}$ обозначает случайную величину, являющуюся по своему значению k-й сверху из множества S. Таким образом, $S_{[1]}$ и $S_{[n]}$ обозначают соответственно максимум и минимум из S.

Следствие 6.3. Предположим, что $X(t)$ имеет непрерывное распределение. Тогда опцион для получения актива с k-й сверху стоимостью в момент τ имеет стоимость в момент времени 0 равную

$$\sum_{j=1}^{n} S_j(0) \text{ prob } \{S_j(\tau) \text{ имеет ранг } k \text{ в } S\,;\, h^* + \mathbf{1}_j\}. \qquad (6.22)$$

Доказательство. Стоимость опциона в момент времени 0 равна

$$E(e^{-r\tau} S_{[k]};\, h^*).$$

Так как $X(t)$ имеет непрерывное распределение, имеем равенство

$$S_{[k]} = \sum_{j=1}^{n} S_j(\tau) I\{S_j(\tau) \text{ имеет ранг } k \text{ в } S\}.$$

Теперь формула (6.22) следует из теоремы.

Следствие 6.4. Предположим, что $X(t)$ имеет непрерывное распределение. Тогда европейский опцион-колл на актив с k-й сверху стоимостью и ценой исполнения K в момент τ имеет стоимость в момент времени 0 равную

$$\sum_{j=1}^{n} S_j(\tau) \text{prob } \{S_j(\tau) > K \text{ и } S_j(\tau) \text{ имеет ранг } k \text{ в } S;\, h^* + \mathbf{1}_j\} -$$
$$- \; e^{-r\tau} K \text{ prob } \{S_{[k]} > K;\, h^*\}.$$

Доказательство следствия 6.4 является, по существу, комбинацией доказательств следствий 6.2 и 6.3. Заметим, что когда $K = 0$, следствие 6.4 превращается в следствие 6.3.

Имеется, очевидно, и много других применений теоремы 6.1. Например, в статье М. Шерриса (Sherris, 1992) анализировался «опцион налога на прирост капитала», платежи по которому в момент времени τ равны

$$(S(\tau) - \max[C(\tau), K])_+,$$

где $S(t)$ обозначает цену рискового актива в момент времени t и $C(t)$ обозначает стоимость индекса в момент времени t.

Результат Шерриса следует из формулы

$$(S-\max[C,K])_+ = S\,I\,(S > C \text{ и } S > K) -$$

$$-\,[CI\,(S > C > K) + KI\,(S > K > C)].$$

В заключение покажем, что американский опцион-колл на максимум из n акций, не выплачивающих дивиденды, лучше не исполнять до их даты погашения. Следовательно, стоимость американского опциона определяется следствием 6.4 при $k = 1$. Доказательство достигается посредством двойного применения неравенства Иенсена:

$$E[e^{-rt}(\max\{S_j(t)\}-K)_+;\,h^*] \geq (E\,[e^{-rt}\max\{S_j(t)\};\,h^*]-e^{-rt}K)_+ \geq$$

$$\geq (\max E\,[e^{-rt}\{S_j(t)\};\,h^*]-e^{-rt}K)_+ =$$

$$= (\max\{S_j(0)\}-e^{-rt}K)_+ \geq (\max\{S_j(0)\}-K)_+\,.$$

Для $t > 0$ и $r > 0$ последнее неравенство является строгим, если в текущий момент опцион в деньгах, то есть если $\max\{S_j(0)\} > K$.

§ 5. ЛОГАРИФМЫ ЦЕН АКЦИЙ КАК МНОГОМЕРНЫЙ ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС

В финансовой литературе обычно предполагается, что цены лежащих в основе активов порождаются геометрическими броуновскими движениями. Другими словами, предполагается, что $\{X(t)\}$ является n-мерным винеровским процессом. Теперь покажем, что многие результаты по опционам и финансовым производным, имеющиеся в литературе, непосредственно следуют из теоремы 6.1 (§ 4) и ее следствий.

Пусть $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^{\mathrm{T}}$ и $V = (\sigma_{ij})$ обозначают соответственно вектор средних и ковариационную матрицу $\{X(1)\}$. Предполагается, что V невырожденная. Для $t > 0$ плотность вероятностей $\{X(t)\}$

$$f(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|tV|^{1/2}}\exp[-(x-t\mu)^{\mathrm{T}}(2tV)^{-1}(x-t\mu)],\quad x\in \mathrm{R}^n.$$

Можно показать, что

$$M(z,t)=\exp\{t(z^{\mathrm{T}}\mu + z^{\mathrm{T}}Vz/2)\},\quad z\in \mathrm{R}^n.$$

Таким образом, для $h \in \mathrm{R}^n$ имеет место равенство

$$M(z,t;h) = M(z+h,t)\,/\,M(h,t) = \exp\{t(z^{\mathrm{T}}(\mu+Vh)+z^{\mathrm{T}}Vz/2)\},\quad z\in \mathrm{R}^n,$$

которое показывает, что преобразование Эсшера с параметром h n-мерного винеровского процесса является опять n-мерным винеровским процессом с модифицированным вектором средних за единицу времени $\mu + Vh$ и прежней ковариационной матрицей на единицу времени V. Из уравнения (6.5) следует, что для $j = 1, 2,\ldots, n$

$$r = \mathbf{1}_j^{\mathrm{T}}(\mu + Vh^*) + \mathbf{1}_j^{\mathrm{T}} V\, \mathbf{1}_j/2,$$

откуда мы получаем

$$\mu + Vh^* = (r - \sigma_{11}/2, r - \sigma_{22}/2, \ldots , r - \sigma_{nn}/2)^{\mathrm{T}}. \qquad (6.23)$$

Следовательно, вектор средних за единицу времени модифицированного процесса с параметром $h^* + \mathbf{1}_j$

$$\mu + V(h^* + \mathbf{1}_j) =$$

$$= (r + \sigma_{1j} - \sigma_{11}/2, r + \sigma_{2j} - \sigma_{22}/2, \ldots , r + \sigma_{nj} - \sigma_{nn}/2)^{\mathrm{T}}. \qquad (6.24)$$

Заметим, что правые части равенств (6.23) и (6.24) не содержат каких-либо элементов вектора μ.

Чтобы получить основной результат статьи Маргрейба (1978), вычислим математическое ожидание

$$E(e^{-r\tau}[S_1(\tau) - S_2(\tau)]_+; h^*),$$

которое по следствию 6.1 равно

$$S_1(0) \operatorname{prob}\{ S_1(\tau) > S_2(\tau); h^* + \mathbf{1}_1\} - S_2(0) \operatorname{prob}\{ S_1(\tau) > S_2(\tau); h^* + \mathbf{1}_2\} =$$

$$= S_1(0) \operatorname{prob}\{ Y < \xi; h^* + \mathbf{1}_1\} - S_2(0) \operatorname{prob}\{ Y < \xi; h^* + \mathbf{1}_2\},$$

где $Y = X_2(\tau) - X_1(\tau)$ и $\xi = \ln[S_1(0)/S_2(0)]$.

Случайная величина Y является нормальной по отношению к любому преобразованию Эсшера:

$$E(Y; h^* + 1_1) = [(r + \sigma_{21} - \sigma_{22}/2) - (r + \sigma_{11} - \sigma_{11}/2)]\, \tau =$$

$$= (-\sigma_{11}/2 + \sigma_{21} - \sigma_{22}/2)\, \tau$$

и

$$E(Y; h^* + 1_2) = [(r + \sigma_{22} - \sigma_{22}/2) - (r + \sigma_{12} - \sigma_{11}/2)]\, \tau =$$

$$= (\sigma_{11}/2 + \sigma_{12} + \sigma_{22}/2)\, \tau.$$

Дисперсия Y не зависит от вектора параметров; она равна

$$(\sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22})\, \tau.$$

Введя для краткости

$$v^2 = \sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22}$$

(дисперсию за единицу времени процесса $\{X_2(\tau) - X_1(\tau)\}$), получим

$$E(Y;\, h^* + \mathbf{1}_1) = -\, v^2\tau/2, \quad E(Y;\, h^* + \mathbf{1}_2) = -\, v^2\tau/2, \quad \mathrm{var}(Y) = v^2\tau\,.$$

Таким образом, стоимость (в момент времени 0) опциона на обмен $S_2(\tau)$ на $S_1(\tau)$ в момент времени τ равна

$$S_1(0)\,\Phi\left(\frac{\xi + v^2\tau/2}{v\sqrt{\tau}}\right) - S_2(0)\,\Phi\left(\frac{\xi - v^2\tau/2}{v\sqrt{\tau}}\right), \tag{6.25}$$

которая и является формулой Маргрейба.

Немного удивительно, что формула (6.25) не зависит от безрисковой процентной ставки r. Заметим также, что при $S_2(t) = Ke^{r(t-\tau)}$ формула (6.25) превращается в формулу Блэка – Шоулса (6.12).

Теперь подсчитаем стоимость (в момент времени 0) опциона для получения большего из $S_1(\tau)$ и $S_2(\tau)$ в момент времени τ. Из равенства

$$\max\,[S_1(\tau), S_2(\tau)] = S_2(\tau) + [S_1(\tau) - S_2(\tau)]_+$$

получаем стоимость опциона в виде

$$S_2(0) + e^{-r\tau} E\,([S_1(\tau) - S_2(\tau)]_+;\, h^*),$$

что с учетом выражения (6.25) равно

$$S_1(0)\,\Phi\left(\frac{\xi + v^2\tau/2}{v\sqrt{\tau}}\right) + S_2(0)\left[1 - \Phi\left(\frac{\xi - v^2\tau/2}{v\sqrt{\tau}}\right)\right] =$$

$$= S_1(0)\,\Phi\left(\frac{\xi + v^2\tau/2}{v\sqrt{\tau}}\right) + S_2(0)\,\Phi\left(\frac{-\xi + v^2\tau/2}{v\sqrt{\tau}}\right) =$$

$$= S_1(0)\,\Phi\left(\frac{\ln[S_1(0)/S_2(0)] + v^2\tau/2}{v\sqrt{\tau}}\right) +$$

$$+ S_2(0)\,\Phi\left(\frac{\ln[S_2(0)/S_1(0)] + v^2\tau/2}{v\sqrt{\tau}}\right). \tag{6.26}$$

Этот результат можно также получить с помощью применения следствия 6.3 при $n = 2$. Снова примечательно, что выражение (6.26) не зависит от r.

Аналогичным образом из следствия 6.4 также можно получить результаты Шталца для цены европейского опциона-колл на минимум из двух рисковых активов с известными ценой и датой исполнения и Джонсона для цены европейских опционов на максимум и минимум из n рисковых активов с известной ценой исполнения.

§ 6. ЦЕНЫ АКТИВОВ, ВЫПЛАЧИВАЮЩИХ ДИВИДЕНДЫ

Определение цены американских опционов с конечной датой истечения является исследованной проблемой в области финансовой экономики. Основную трудность составляет определение оптимальной границы исполнения. Здесь начнем изучать проблему определения цены американского опциона без даты истечения и теоремы опционного выбора остановки с помощью метода преобразований Эсшера. Эта проблема решаема, поскольку оптимальная граница исполнения бессрочного американского опциона не изменяется по отношению к временной переменной. Мы получим простую, но достаточно общую формулу для цены бессрочного американского опциона-пут на акцию, уменьшение которой не происходит скачкообразно. Аналогично получаем формулу для цены бессрочного американского опциона-колл на акцию, увеличение которой не происходит скачкообразно. В последнем параграфе главы мы представим семейство стохастических процессов для моделирования таких изменений цены акции. Это семейство включает винеровский процесс, гамма-процесс и обратный гауссовский процесс, а также комбинацию таких процессов.

В классических предположениях о том, что цена акции является геометрическим броуновским движением, проанализируем общий бессрочный американский зависимый платеж и получим формулы для бессрочного опциона и русского опциона. Мартингальный подход избегает использования дифференциальных уравнений. Мы также объясним соотношение между условиями гладкого склеивания Самюэльсона и условием оптимальности первого порядка.

Нейтральное к риску преобразование Эсшера

Для $t \geq 0$ символ $S(t)$ обозначает цену не выплачивающей дивиденды акции или ценной бумаги в момент t. Предположим, что имеется стохастический процесс $\{X(t), t \geq 0\}$, $X(0) = 0$, со стационарными и независимыми приращениями такой, что

$$S(t) = S(0) \exp\{X(t)\}, \qquad t \geq 0.$$

Для каждого t случайная величина $X(t)$, которую можно интерпретировать как непрерывно конвертируемую ставку доходности по t периодам, имеет неограниченно делимое распределение. Пусть ее функция распределения

$$F(x, t) = \text{prob}\,[X(t) \leq x],$$

а ее ПФМ

$$M(z, t) = E\,[\exp\{zX(t)\}]$$

Путем предположения, что $M(z, t)$ является непрерывной в точке $t = 0$, можно доказать, что

$$M(z, t) = [M(z, 1)]^t.$$

Преобразование Эсшера *случайной величины* – уже установившееся понятие, а здесь рассмотрим преобразование Эсшера *случайного процесса*, которое удовлетворяет равенству (6.2). Преобразование Эсшера с параметром h случайного процесса $\{X(t), t \geq 0\}$ снова является процессом со стационарными и независимыми приращениями; модифицированное распределение $X(t)$ теперь приобретает вид

$$F(x, t; h) = \text{prob}\left[X(t) \leq x;\, h\right] = \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} e^{hy}\,dF(y, t)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{hy}\,dF(y, t)} = \frac{1}{M(h, t)} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{hy}\,dF(y, t).$$

$$M(z, t;\, h) = \frac{M(z+h, t)}{M(h, t)}.$$

Из (6.2) следует, что

$$M(z, t; h) = \left[\frac{M(z+h, t)}{M(h, t)}\right]^t = [M(z, 1; h)]^{\,t}.$$

Поскольку экспоненциальная функция положительная, модифицированная вероятностная мера является *эквивалентной* по отношению к первоначальной вероятностной мере, т. е. обе вероятностные меры имеют одни и те же множества меры нуль. Соответствующий параметр $h = h^*$ определяется согласно принципу нейтрального к риску определения стоимости (см. гл. 2) или, используя терминологию гл. 3 и гл. 4, мы ищем $h = h^*$, чтобы получить эквивалентную мартингальную меру.

Предположим, что безрисковая процентная ставка является постоянной и обозначается символом r, а также, что рынок является невязким и торговля непрерывная. Не имеется налогов, издержек на сделки и ограничений на займы или короткие продажи. Все ценные бумаги совершенно делимы. Далее предположим, что акция выплачивает непрерывный поток дивидендов с нормой, пропорциональной ее цене, т. е. имеется неотрицательная константа ρ такая, что дивиденд, выплачиваемый между моментами времени t и $t + dt$, равен $S(t)\,\rho dt$. Ищем параметр $h = h^*$ так, чтобы процесс $\{S(t) \exp\{-(r - \rho)\, t\}, t \geq 0\}$ являлся мартингалом по отношению к вероятностной мере, соответствующей h^*. В частности,

$$S(0) = E\,[S(t) \exp\{-(r - \rho)\, t\}; h^*]; \tag{6.27}$$

отсюда по формулам (6.1) и (6.2)

$$\exp\{(r - \rho)\, t\} = E\,[\exp\{X(t)\}; h^*] = [M(1, 1; h^*)\,]^t,$$

или

$$\ln\,[M(1, 1; h^*)] = (r - \rho). \tag{6.28}$$

Назовем преобразование Эсшера с параметром h^* *нейтральным к риску преобразованием Эсшера*, а соответствующую эквивалентную мартингальную меру *нейтральной к риску мерой Эсшера*. Цена финансовой производной, чьи платежи зависят от $\{S(t)\}$ называется дисконтированной ожидаемой стоимостью, где математическое ожидание вычисляется по нейтральной к риску мере Эсшера.

При некоторых условиях регулярности уравнение (6.28) имеет единственное решение. Чтобы показать это, рассмотрим функцию

$$G(h) = \ln\,[M(1, 1; h)] = \ln\,[M(1 + h, 1)] - \ln\,[M(h, 1)].$$

Формула

$$\frac{d}{dh}E[X(1);\ h]=\operatorname{var}[X(1);\ h]$$

показывает, что $E\,[X(1);\, h]$ – возрастающая функция h. Отсюда

$$\frac{d}{dh}g(h)=E[X(1);\ 1+h]-E[X(1);\ h]$$

является положительной, показывая, что $g\,(h)$ – возрастающая функция. Это и обеспечивает единственность решения уравнения (6.28), которым является

$$g(h) = r - \rho.$$

Чтобы рассмотреть проблему существование решения, обозначим через $M \le +\infty$ и $m \ge -\infty$ соответственно правую и левую конечные точки интервала возможных значений величины $X(1)$. Предположим, что $m + \rho < r < M + \rho$, или $m < r - \rho < M$, поскольку в противном случае был бы возможен арбитраж. Пусть (a, b) обозначает интервал значений h, для которого существует $g(h)$. При некоторых условиях регулярности

$$\lim_{h\downarrow a} g(h)=m, \qquad \lim_{h\uparrow b} g(h)=M,$$

и в этом случае уравнение (6.27) имеет решение. Следует заметить, что хотя нейтральная к риску мера Эсшера является единственной, могут быть и другие эквивалентные мартингальные меры (например, в работе F. Delbaen, J. Haezendonck (1989) изучаются эквивалентные меры составных пуассоновских процессов).

Цена финансовой производной принимается как математическое ожидание ее дисконтированных выплат по нейтральной к риску мере Эсшера. Например, рассмотрим европейский опцион-колл на акцию с ценой исполнения K и датой истечения t, $t > 0$. Пусть $I(.)$ обозначает индикаторную функцию и $k = \ln[K/S(0)]$. Цена опциона в момент 0

$$e^{-rt} E\,[(S(t) - K)I(S\,(t) > K)\,;\, h^*] =$$

$$= e^{-rt} E\,[S(t)I(S\,(t) > K);\, h^*] - e^{-rt} KE\,[I\,(S\,(t) > K);\, h^*]. \qquad (6.29)$$

Математическое ожидание во втором слагаемом правой части равенства (6.29) равно

$$\text{prob}\,[S\,(t) > K;\, h^*] = 1 - F\,(k\,,\, t;\, h^*).$$

Чтобы оценить математическое ожидание в первом слагаемом правой части (6.29), заметим, что для каждой измеримой функции $g(.)$

$$E[g(S(t));h]=\frac{E[g(S(t))e^{hX(t)}]}{E[e^{hX(t)}]}=\frac{E[g(S(t))S(t)^h]}{E[S(t)^h]}.$$

Используя эту формулу, можно доказать следующий результат.

Лемма 6.1. Пусть h и k являются двумя вещественными числами. Предположим, что преобразования Эсшера с параметрами h и $h + k$ существуют. Тогда для каждой измеримой функции $\psi(.)$

$$E\,[S\,(t)^k\,\psi(S(t));\,h] = E\,[S\,(t)^k;\,h] \times E\,[\psi\,(S(t));\,h + k].$$

Применяя лемму при $k = 1$, $\psi(x) = I\,(x > K)$ и $h = h^*$ и представление (6.27), получим

$$E[S(t)\,I(S(t) > K)\,;\,h^*] = E[S(t)\,;\,h^*]\,E[I(S(t) > K)\,;\,h^*+1] =$$

$$= S(0)\;e^{(r-\rho)t}\;\text{prob}\,[S(t) > K\,;\,h^* + 1].$$

Таким образом, цена европейского опциона-колл равна

$$S(0)e^{-\rho t}\,[1 - F\,(k, t;\,h^* + 1)] - e^{-rt}K\,[1 - F(k, t;\,h^*)]. \qquad (6.30)$$

Если $\{X(t)\}$ является винеровским процессом с дисперсией за единицу времени σ^2, тогда согласно формуле (6.30)

$$S(0)e^{-\rho t}\Phi\left(\frac{-k+(r-\rho+\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right)-e^{-r\tau}K\Phi\left(\frac{-k+(r-\rho-\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right), \qquad (6.31)$$

где Φ обозначает функцию стандартного нормального распределения.

При $\rho = 0$ этот результат становится классической формулой Блэка – Шоулса (6.12) для определения цены опциона. Формула (6.31) впервые другим способом была получена С. Смитом (1976).

Теперь предположим, что акция выплачивает дивиденды с постоянной пропорциональной нормой ρ. Если все дивиденды реинвестируются в акции, тогда каждая доля акции в момент времени 0 вырастает до $e^{\rho t}$ долей в момент времени t. Это дает следующую интерпретацию для формулы (6.27):

$$S\,(0) = E\,[\exp\{-rt\}\,S\,(t)\,\exp\,\{\rho t\};\,h^*].$$

С другой стороны, можно также рассмотреть ситуацию, когда никакие дивиденды не реинвестируются в акции. Тогда придем к интуитивной формуле:

$$S(0) = E\left[\int_0^t e^{-ru} S(u) \rho du + e^{-rt} S(0);\ h^*\right]. \qquad (6.32)$$

Чтобы доказать справедливость представления (6.32), изменим порядок вычисления математического ожидания и интегрирования в правой части и используем формулу

$$E\,[S\,(u)\exp\{-\delta u\};\,h^*] = S\,(0)\exp\{-\rho u\}.$$

Таким образом,

$$\text{правая часть} = S(0)\left(\int_0^t e^{-ru} S(u) \rho du + e^{-\rho t}\right) = S\,(0) = \text{левая часть.}$$

Формулу (6.30) можно использовать для определения цены опциона обмена валюты, когда $S\,(t)$ обозначает текущий обменный курс в момент времени t, r – местную процентную ставку, а ρ – иностранную процентную ставку. В этом контексте выражение (6.31) известно как формула Гармана – Колхагена (*Garman – Kohlhagen formula*).

§ 7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНЫ БЕССРОЧНОГО АМЕРИКАНСКОГО ОПЦИОНА

При помощи применения теоремы опционного выбора мы получим формулы для определения цен бессрочных американских опционов-пут на акции. Сделаем предположения относительно цен акций и дивидендов, которые были введены в § 6. При определении цены бессрочного американского опциона-пут дополнительно предположим, что убывание цены акции не происходит скачкообразно. Аналогично, когда определяется цена бессрочного американского опциона-колл, предположим, что возрастание цены акции не происходит скачкообразно. При этих предположениях, принимаемых для удобства, могут быть получены достаточно простые формулы.

Сначала рассмотрим *бессрочный американский опцион-пут* с ценой исполнения K. Временно предположим, что $K < S(0)$, чтобы исключалось немедленное исполнение опциона. Владелец опциона исполняет его в соответствии с некоторой стратегией в момент остановки T. Тогда в момент T получим $(K - S(T))_+$, где $x_+ = \max\{x, 0\}$. Таким образом, стоимость опциона в момент 0, ассоциированная со стратегией равна

$$E[(K - S(T))_+ \exp\{-rT\}; h^*].$$

Чтобы максимизировать это выражение, можно ограничиться стационарными стратегиями вида

$$T_L = \inf\{t \mid S(t) \le L\}, \quad L \le K.$$

Опцион исполняется в первый же момент времени, когда цена акции становится равной или меньше уровня L, если это происходит. Цена опциона является максимальным значением

$$E[\exp\{-rT_L\}(K - S(T_L))_+; h^*]. \tag{6.33}$$

В предположении, что процесс цены $\{S(t), t \ge 0\}$ не может уменьшаться скачкообразно, цена акции в момент, когда опцион исполняется, равна L, т. е.

$$L = S(T_L) = S(0)\exp\{X(T_L)\}. \tag{6.34}$$

Для простоты обозначим текущую цену акции $S(0)$ через S, а выражение (6.33) – через $V(S, L)$. Так как $L \le K$

$$V(S, L) = (K - L)\, E[\exp\{-rT_L\}; h^*]. \tag{6.35}$$

Математическое ожидание в равенстве (6.35) является преобразованием Лапласа в точке T_L и может быть вычислено с помощью следующих классических рассуждений.

Рассмотрим стохастический процесс $\{\exp[-rt + \theta X(t)], t \ge 0\}$. Для $t \le T_L$ он является ограниченным мартингалом по отношению к нейтральной к риску мере Эсшера, если коэффициент θ – отрицательное решение уравнения

$$E[\exp\{-rt + \theta X(t)\}; h^*] = 1 \text{ или } M(\theta, 1; h^*) = \exp\{r\}. \tag{6.36}$$

Уравнение (6.36) имеет два вещественных корня: один является отрицательным, а другой – больше единицы. Чтобы увидеть это, рассмотрим функцию $\phi(\theta) = M(\theta, 1; h^*) = E[\exp\{\theta X(1)\}; h^*]$. Так как

$$\phi''(\theta) = E\,[X(1)^2 \exp\{\theta X(1)\};\, h^*],$$

функция $\phi(\theta)$ является выпуклой. Следовательно, уравнение (6.36)

$$\phi(\theta) = \exp\{r\}$$

имеет не более двух решений. Заметим, что $\phi(0) = 1 < \exp\{r\}$, и из представления (6.28) следует, что $\phi(1) = \exp\{r - \rho\} < \exp\{r\}$.

Предположим, что prob $\{X(1) < 0\} > 0$ и prob $\{X(1) > 0\} > 0$, откуда следует, что $\phi(\theta) \to +\infty$ для $\theta \to -\infty$ и для $\theta \to +\infty$. Таким образом, уравнение (6.36) имеет два корня: $\theta_0 < 0$ и $\theta_1 > 1$.

По теореме опционного выбора (*optional sampling theorem*) мы имеем $E\,[\exp\{-rT_L + \theta_0 X(T_L)\};\, h^*] = 1$, которое согласно соотношению (6.34) превращается в равенство

$$E\,[\exp\{-rT_L\};\, h^*] = (L/S)^{-\theta_0}\,. \tag{6.37}$$

Применение равенства (6.37) к выражению (6.35) дает для $S \geq L$ и $K > L$,

$$V(S, L) = (K - L)\,(L/S)^{-\theta_0}\,. \tag{6.38}$$

Для данной текущей цены акции S ищем максимальное значение стоимости (6.38), варьируя границу исполнения опциона L. Пусть V_L обозначает частную производную V по L. Тогда решение уравнения $V_L(S, L) = 0$ даст оптимальную границу исполнения опциона

$$L = \widetilde{L} = -\theta_0 K / (1 - \theta_0).$$

Таким образом, максимальное значение

$$V(S, \widetilde{L}) = \frac{K}{1-\theta_0}\left[\frac{-K\theta_0}{S(1-\theta_0)}\right]^{-\theta_0}.$$

Оно является ценой бессрочного американского опциона-пут при условии, что $S \geq \widetilde{L}$. Для $S < \widetilde{L}$ опцион исполняется немедленно и цена его составляет $K - S$. Следовательно, цена опциона равна

$$\begin{cases} \dfrac{K}{1-\theta_0}\left[\dfrac{-K\theta_0}{S(1-\theta_0)}\right]^{-\theta_0}, & \text{если} \quad S \geq \widetilde{L}, \\ K - S, & \text{если} \quad S < \widetilde{L}. \end{cases} \tag{6.39}$$

Может показаться удивительным, что r и ρ явно не содержатся в формуле (6.39). Однако они были использованы при определении θ_0.

Теперь рассмотрим определение цены бессрочного американского опциона-колл с ценой исполнения K и временно предположим, что $K > S$. Для $M \geq K$ определим

$$T_M = \inf\{t \mid S(t) \geq M\}$$

и

$$W(S, M) = E\,[\exp\{-\delta T_M\}(S(T_M) - K)_+;\, h^*]. \tag{6.40}$$

В предположении, что процесс цены акции $\{S(t),\, t \geq 0\}$ не изменяется скачкообразно вверх, цена акции будет равна M в момент, когда исполняется опцион, т. е. $S(t) = M$. Так как $M \geq K$, формула (6.40) превращается в следующую:

$$W(S, M) = (M - K)E\,[\exp\{-rT_M\};\, h^*]. \tag{6.41}$$

Математическое ожидание в формуле (6.41) вычисляется тем же самым способом, как и выше, исключая тот факт, что теперь используется θ_1, положительный корень уравнения (6.36), чтобы быть уверенными в том, что $(\exp\{-rt + \theta_1 X(t)\})$ является ограниченным мартингалом (по отношению к нейтральной к риску мере Эсшера) для $t \leq T_M$. Окончательная формула имеет вид $E\,[\exp\{-rT_M\};\, h^*] = (S/M)^{\theta_1}$.

Для заданной текущей цены S максимальное значение

$$W(S, M) = (M - K)(S/M)^{\theta_1} \tag{6.42}$$

достигается при

$$M = \tilde{M} = \theta_1 K / (\theta_1 - 1),$$

поэтому

$$W(S, \tilde{M}) = \frac{K}{\theta_1 - 1}\left[\frac{S(\theta_1 - 1)}{K\theta_1}\right]^{\theta_1}.$$

Это дает цену бессрочного американского опциона-колл при условии, что $S \leq \tilde{M}$. Для $S > \tilde{M}$ опцион исполняется немедленно и цена равна просто $S - K$. Таким образом, цена опциона определяется выражением

$$\begin{cases} \dfrac{K}{\theta_1 - 1}\left[\dfrac{S(\theta_1 - 1)}{K\theta_1}\right]^{\theta_1}, & \text{если} \quad S \leq \tilde{M}, \\ S - K, & \text{если} \quad S > \tilde{M}. \end{cases} \tag{6.43}$$

Когда доходность дивидендов ρ стремится к нулю, корень θ_1 стремится к 1, граница оптимального исполнения $\widetilde{M}$ стремится к ∞, а цена бессрочного американского опциона-колл стремится к S, текущей цене акции. Эти предельные результаты можно проверить прямым вычислением: для $\rho = 0$, $\theta_1 = 1$ формула (6.42) сводится к следующей

$$W(S, M) = (1 - K / M)\, S, \quad M \geq K.$$

Так как эта функция строго возрастает от M, ее наибольшее значение не достигается при конечных значениях M и максимальным значением (стоимостью опциона) является S. Таким образом, если $\rho = 0$, бессрочный американский опцион-колл никогда не будет исполняться, но несмотря на это, он будет иметь положительную стоимость. Чтобы избежать этой аномалии, можно модифицировать выплату опциона-колл следующим образом

$$[(S(T_M) - K)_+]^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Тогда

$$W(S, M) = (M - K)^{\alpha} (S/M),$$

которая принимает максимальное значение при $\widetilde{M} = K / (1 - \alpha)$.

Условие гладкого склеивания

Каждая из формул (6.39) и (6.43) как функция текущей цены акции S имеет непрерывную первую производную, поскольку

$$V(\widetilde{L}, \widetilde{L}) = K - \widetilde{L}, \qquad V_S(\widetilde{L}, \widetilde{L}) = -1 \tag{6.44}$$

и

$$W(\widetilde{M}, \widetilde{M}) = \widetilde{M} - K, \qquad W_S(\widetilde{M}, \widetilde{M}) = 1. \tag{6.45}$$

Формулы (6.44) и (6.45) являются частными случаями так называемого *условия качественного контакта* (*high contact condition*) Самюэльсона; в литературе о задачах оптимальной остановки используется термин *условие гладкого склеивания* (*smooth pasting condition*), или *принцип гладкой аппроксимации* (*principle of smooth fit*), который приписывается Колмогорову.

Р. Мертон (1973) получил условие гладкого склеивания как необходимое условие оптимальности первого порядка. При некоторых слабых условиях обратное также имеет место – решение оптимальной задачи остановки, удовлетворяющее условию гладкого склеивания, является на самом деле оптимальным решением задачи. Легко проверить, что условие (6.44) определяет оптимальную границу исполнения $\widetilde{L}$, в то время как условие (6.45) определяет оптимальную границу исполнения $\widetilde{M}$.

Теперь получим формулу, объясняющую, как соотносятся условие гладкого склеивания (6.44) и оптимальность $V(S, .)$. Пусть

$$\lambda\,(S, L) = E\,[\exp\{-rT_L\};\, h^*].$$

Из равенства (6.37) или просто из интерпретации следует, что для $0 < x < S - L$,

$$\lambda\,(S, L) = \lambda\,(S, L + x)\,\lambda\,(L + x, L). \tag{6.46}$$

Дифференцируя равенство (6.46) по x и подставляя $x = 0$, получаем

$$0 = \lambda_L(S, L) + \lambda(S, L)\,\lambda_S(L, L). \tag{6.47}$$

Теперь пусть

$$\pi(x) = (K - x)_+ \tag{6.48}$$

обозначает функцию платежа. Тогда формула (6.35) приобретает вид

$$V(S, L) = \pi(L)\,\lambda(S, L). \tag{6.49}$$

Дифференцирование (6.49) по L и применение (6.47) дают

$$V_L\,(S, L) = \pi_L\,(L)\,\lambda\,(S, L) + \pi\,(L)\,\lambda_L\,(S, L) = \pi_L\,(L)\,\lambda(S, L) -$$

$$- \pi\,(L)\,\lambda\,(S, L)\,\lambda_S\,(L, L) = \lambda\,(S, L)\,\{\pi_L\,(L) - V_S\,(L, L)\}. \tag{6.50}$$

Формула (6.50) может также быть получена с помощью равенства (6.38). Так как $\lambda\,(S, L)$ является положительной, $V_L\,(S, L) = 0$, если и только если

$$V_S\,(L, L) = \pi_L\,(L). \tag{6.51}$$

Выражение (6.50) явно показывает, что граница оптимального исполнения $\widetilde{L}$ не зависит от текущей цены акции S. Заметим, что равенства (6.49), (6.50) и (6.51) имеют место и для функций платежей $\pi(.)$ более общих, чем функция (6.48).

Аналогично можно получить формулу

$$W_M(S, M) = \mu(S, M)\{\pi_M(M) - W_S(M, M)\}, \qquad (6.52)$$

где

$$\mu(S, M) = E[\exp\{-rT_M\}; h^*].$$

§ 8. ЛОГАРИФМ ЦЕНЫ АКЦИИ КАК ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС

Случайный процесс со стационарными и независимыми приращениями и выборочными траекториями, которые не могут скачкообразно увеличиваться и уменьшаться (т. е. непрерывны), является винеровским процессом. Предположим, что $\{X(t),\ t \geq 0\}$ – винеровский процесс; тогда $S(t)$ становится классической моделью геометрического броуновского движения для изменений цены акции (см. Samuelson, 1965). Пусть μ и σ^2 обозначают соответственно среднее и дисперсию процесса $X(t)$ за единицу времени. В терминах стохастических дифференциальных уравнений предположением является

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW(t), \quad t \geq 0,$$

где $\{W(t), t \geq 0\}$ обозначает стандартный винеровский процесс.

Так как

$$M(z, t) = \exp\{(\mu z + \sigma^2 z^2/2)\, t\},$$

из равенства (6.4) следует, что

$$\ln[M(z, t; h)] = [(\mu + h\sigma^2)\, z + \tfrac{1}{2}\sigma^2 z^2]\, t.$$

Это показывает, что преобразованный процесс имеет модифицированное среднее за единицу времени $\mu + h\sigma^2$ и прежнюю дисперсию за единицу времени σ^2. Из представления (6.28) мы получаем

$$(\mu + h^*\sigma^2) + \sigma^2/2 = r - \rho.$$

Таким образом, для определения стоимости ФП используем винеровский процесс со средним за единицу времени

$$\mu + h^*\sigma^2 = r - \rho - \sigma^2/2.$$

Из равенства (6.36) получаем

$$(r - \rho - \sigma^2/2)\theta + \sigma^2\theta^2/2 = r,$$

или

$$\sigma^2\theta^2 + (2r - 2\rho - \sigma^2)\theta - 2r = 0. \qquad (6.53)$$

Корнями этого квадратного уравнения являются

$$\theta = \frac{-\left(2r - 2\rho - \sigma^2\right) - \sqrt{\left(2r - 2\rho - \sigma^2\right)^2 + 8\sigma^2 r}}{2\sigma^2} \qquad (6.54)$$

и

$$\theta = \frac{-\left(2r - 2\rho - \sigma^2\right) + \sqrt{\left(2r - 2\rho - \sigma^2\right)^2 + 8\sigma^2 r}}{2\sigma^2}. \qquad (6.55)$$

Формула (6.55) получена Х. МакКином (1965), который изучал определение цен опционов, хотя, конечно, он не решал задачу в терминах меры, нейтральной к риску. При нулевой доходности дивидендов ($\rho = 0$) формула (6.54) превращается в равенство $\theta_0 = -2r / \sigma^2$, которое впервые получено Мертоном (1973) методом МакКина, как стоимость бессрочного американского опциона-пут.

В финансовой анализе формулы для определения цены бессрочных американских опционов выводятся следующим образом. Пусть D обозначает стоимость ФП. Из рассуждений по хеджированию, впервые данных Блэком и Шоулсом (1973), следует, что D удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\sigma^2 S^2 D_{SS}/2 + (r - \rho)\, S\, D_S - r\, D + D_t = 0 \qquad (6.56)$$

при наличии соответствующих краевых условий. В случае бессрочного опциона $D_t = 0$ и уравнение (6.56) становится однородным линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка по S

$$\sigma^2 S^2 D_{SS}/2 + (r - \rho)\, S\, D_S - r\, D = 0. \qquad (6.57)$$

Функция $D = S^{\theta}$ является решением (6.57), если показатель θ удовлетворяет квадратичному уравнению

$$\sigma^2\theta(\theta - 1)/2 + (r - \rho)\theta - r = 0,$$

которое является тем же, что и уравнение (6.53). Тогда общее решение уравнения (6.57) имеет вид

$$D = c_0 S^{\theta_0} + c_1 S^{\theta_1}, \qquad (6.58)$$

где c_0 и c_1 не зависят от S.

Здесь мы используем мартингальный подход и избегаем дифференциальных уравнений. Дополнительная интерпретация решения (6.58) дается ниже (см. формулу (6.64)).

Бессрочные зависимые платежи

Рассмотрим определение цены бессрочных зависимых исков с U-образными функциями платежей, такими как

$$\pi(x) = a_1(K_1 - x)_+ + a_2(x - K_2)_+ \,.$$

Для $a_1 = a_2 = 1$ зависимый платеж называется бессрочным американским *стрэнглом*, если $K_1 < K_2$, и бессрочным американским *стрэддлом*, если $K_1 = K_2$. Предположение о процессе $\{X(t), t \geq 0\}$ остается прежним, т. е. он остается винеровским процессом.

Пусть $S = S\,(0)$ обозначает текущую цену акции. Рассмотрим стратегии исполнения, связанные со временами остановки вида

$$T_{L,\,M} = \inf\,\{t \mid S(t) = L \text{ или } S\,(t) = M\},$$

где $0 \leq L \leq S \leq M$.

Стоимость зависимого платежа, соответствующего такой стратегии

$$V(S, L, M) = E\,[\pi\,(S\,(T_{L,\,M}))\,\exp\{-rT_{L,\,M}\};\,h^*].$$

Пусть

$$\lambda\,(S, L, M) = E\,[I(S\,(T_{L,\,M}) = L)\,\exp\{-rT_{L,\,M}\};\,h^*]$$

и

$$\mu\,(S, L, M) = E\,[I(S\,(T_{L,\,M}) = M)\,\exp\{-rT_{L,\,M}\};\,h^*].$$

Тогда

$$V\,(S, L, M) = \pi\,(L)\,\lambda\,(S, L, M) + \pi\,(M)\,\mu\,(S, L, M). \qquad (6.59)$$

Процесс $\{\exp(-rt + \theta\,X(t))\}$ является ограниченным мартингалом (по отношению к мере, нейтральной к риску) для $t \leq T_{L,\,M}$, когда $\theta = \theta_0$ или $\theta = \theta_1$ (корни уравнения (6.53)). Применение теоремы опционного выбора к этим двум мартингалам дает соответственно уравнения

$$\lambda\,(S, L, M)\,(L/S)^{\theta_0} + \mu\,(S, L, M)\,(L/S)^{\theta_0} = 1$$

и

$$\lambda\,(S, L, M)\,(L/S)^{\theta_1} + \mu\,(S, L, M)\,(M/S)^{\theta_1} = 1,$$

решая которые, мы получаем

$$\lambda\,(S, L, M) = \frac{M^{\theta_1}S^{\theta_0} - M^{\theta_0}S^{\theta_1}}{M^{\theta_1}L^{\theta_0} - M^{\theta_0}L^{\theta_1}} \text{ и } \mu\,(S, L, M) = \frac{S^{\theta_1}L^{\theta_0} - S^{\theta_0}L^{\theta_1}}{M^{\theta_1}L^{\theta_0} - M^{\theta_0}L^{\theta_1}}.$$

Заметим, что

$$\lim_{M\to\infty} \lambda(S, L, M) = (S/L)^{\theta_0} = (L/S)^{-\theta_0},$$

которое подтверждает равенство (6.37), и

$$\lim_{L\downarrow 0} \mu(S, L, M) = (S/M)^{\theta_1},$$

которое подтверждает формулу (6.42).

Оставшейся задачей является оптимизация платежа $V(S, L, M)$, рассматриваемой как функция границ исполнения L и M. Условиями оптимальности первого порядка являются равенства $V_L\,(S, \tilde{L}, \tilde{M}) = 0$ и $V_M(S, \tilde{L}, \tilde{M}) = 0$.

Эти условия не зависят от S (пока S находится между L и M). Сначала этот факт кажется удивительным, но он следует немедленно из формул

$$V_L(S, L, M) = \lambda\,(S, L, M)\,\{\pi_L\,(L) - V_S\,(L, L, M)\} \tag{6.60}$$

и

$$V_M\,(S, L, M) = \mu\,(S, L, M)\,\{\pi_M\,(M) - V_S\,(M, L, M)\}, \tag{6.61}$$

которые обобщают соответственно формулы (6.50) и (6.52). Таким образом, условия первого порядка приобретают вид

$$V_S\,(\tilde{L}, \tilde{L}, \tilde{M}) = \pi_L\,(\tilde{L}) \tag{6.62}$$

и

$$V_S\,(\tilde{M}, \tilde{L}, \tilde{M}) = \pi_M\,(\tilde{M}), \tag{6.63}$$

что является условиями гладкого склеивания. Оптимальные границы исполнения $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ определяются путем совместного решения уравнений (6.62) и (6.63). Для $\tilde{L} \le S \le \tilde{M}$ цена бессрочного зависимого платежа

$$V(S, \tilde{L}, \tilde{M}) = \pi\,(\tilde{L})\,\lambda\,(S, \tilde{L}, \tilde{M}) + \pi\,(\tilde{M})\,\mu\,(S, \tilde{L}, \tilde{M}) =$$

$$= \begin{pmatrix} S^{\theta_0} & S^{\theta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{L}^{\theta_0} & \tilde{L}^{\theta_1} \\ \tilde{M}^{\theta_0} & \tilde{M}^{\theta_1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \pi(\tilde{L}) \\ \pi(\tilde{M}) \end{pmatrix} \tag{6.64}$$

Чтобы вывести уравнение (6.60), рассмотрим равенства

$$\lambda\,(S, L, M) = \lambda\,(S, L + x, M)\,\lambda\,(L + x, L, M)$$

и

$$\mu\,(S, L, M) = \mu\,(S, L + x, M) + \lambda\,(S, L + x, M)\,\mu\,(L + x, L, M),$$

где $0 < x < S - L$.

Дифференцирование этих выражений по x и подстановка $x = 0$ дает соответственно

$$0 = \lambda_L\,(S, L, M) + \lambda\,(S, L, M)\,\lambda_S\,(L, L, M) \qquad (6.65)$$

и

$$0 = \mu_L\,(S, L, M) + \lambda\,(S, L, M)\,\mu_S\,(L, L, M). \qquad (6.66)$$

Дифференцируя равенство (6.59) по L и применяя соотношения (6.65) и (6.66), получаем

$$V_L\,(S, L, M) = \pi_L\,(L)\,\lambda\,(S, L, M) + \pi\,(L)\,\lambda_L\,(S, L, M) + \pi\,(M)\,\mu_L\,(S, L, M) =$$

$$= \lambda\,(S, L, M)\,\{\pi_L\,(L) - \pi\,(L)\,\lambda_S\,(L, L, M) - \pi\,(M)\,\mu_S\,(L, L, M)\} =$$

$$= \lambda\,(S, L, M)\,\{\pi_L\,(L) - V_S\,(L, L, M)\},$$

что совпадает с уравнением (6.60). Вывод уравнения (6.61) аналогичен.

Для общих функций платежей может быть несколько непересекающихся оптимальных интервалов неисполнения.

Бессрочный опцион “down-and-out”

Рассмотрим определение цены бессрочного американского опциона-колл «*down-and-out*» с ценой исполнения K. Опционный контракт становится нулевым и неисполняемым, если цена акции уменьшается до нокаутной цены (*knock-out price*) L, $L < K$. Когда это встречается, дается скидка или возмещение суммой R. Для $M \geq K$ из равенства (6.59) следует, что стоимость стратегии для исполнения опциона-колл, когда цена опциона впервые увеличивается до M, равна

$$V(S, L, M) = R\,\lambda\,(S, L, M) + (M - K)\,\mu\,(S, L, M), \quad L \leq S \leq M. \qquad (6.67)$$

Заметим, что нижняя граница исполнения L фиксирована и задачей является максимизация V как функции верхней границы исполнения M.

Теперь рассмотрим частный случай, когда акция не выплачивает дивидендов (следовательно, $\theta_1 = 1$ и $\theta_0 = -2r/\sigma^2$). Покажем, что максимальное значение (6.67) получается при $M \to \infty$ и что

$$V(S, L, \infty) = S + (R - L)\,(L/S)^{-\theta_0} = S + (R - L)\,(L/S)^{2r/\sigma^2}.$$

Этот результат можно также найти у Р. Мертона (1973).

Для доказательства этой формулы мы сначала заметим, что величина $\lambda\,(S, L, M)$ является возрастающей функцией M и, следовательно, первое слагаемое правой части равенства (6.67) ограничено величиной $R\,\lambda\,(S, L, \infty) = R\,(L/S)^{-\theta_0}$. Второе слагаемое правой части равенства (6.67) можно оценить следующим образом

$$(M - K)\,\mu\,(S, L, M) = (M - K)\,\frac{SL^{\theta_0} - S^{\theta_0}L}{ML^{\theta_0} - M^{\theta_0}L} =$$

$$= \frac{M - K}{M - L(L/M)^{-\theta_0}}\left[S - L(L/S)^{-\theta_0}\right] < S - L\,(L/S)^{2r/\sigma^2} =$$

$$= \lim_{M \to \infty}(M - K)\,\mu(S, L, M).$$

§ 9. РУССКИЙ ОПЦИОН

Пусть M является числом таким, что $M \geq S$. Пусть также

$$M(t) = \max\,[M, \max\,\{S(u) \mid 0 \leq u \leq t\}],$$

что можно интерпретировать как максимум цены акции за время t. Заметим, что пара $\{S(t), M(t);\, t \geq 0\}$ является однородным марковским процессом. Термин «русский опцион» предложен Л. Шеппом и А. Ширяевым (Shepp, Shiryaev, 1993) для описания бессрочного американского опциона, платеж которого равен $M(t)$, если он исполняется в момент времени t, $t \geq 0$. То есть владелец русского опциона имеет привилегию получить максимум цены акции за время до того момента, в который он решил исполнить опцион. Цена опциона в момент времени 0 является наибольшим значением по всем моментам остановки $T \geq 0$ величины $E\,[M(T)\exp\{-rT\};\, h^*]$.

Л. Шепп и А. Ширяев показали, что имеется число $\widetilde{k}$, которое зависит только от r, ρ и σ, такое, что если $S(0) > \widetilde{k}\,M$, оптимальной стратегией – это исполнение опциона в первый же момент времени t, когда $S(t) > \tilde{k}\, M(t)$.

Покажем, как можно определить $\tilde{k}$ очень понятным образом. Пусть k является числом $0 < k < 1$. Для текущей цены акции $S = S(0)$ при $kM \le S$ рассмотрим стратегию исполнения опциона в момент остановки $T_k = \inf\{t \mid S(t) = k\,M(t)\}$.

Стоимость этой стратегии обозначим $R(S, M; k)$. Заметим, что

$$R(S, M; k) = M\,R(S/M, 1; k).$$

Отсюда и из определений λ и μ следует, что

$$R(S, M; k) = M\,\lambda\,(S, kM, M) + R(M, M; k)\,\mu\,(S, kM, M) =$$

$$= M\,[\lambda\,(S, kM, M) + R(1, 1; k)\,\mu\,(S, kM, M)].$$

Подставляя явные значения λ и μ,

$$R(S, M; k) = M\,[\lambda\,(S/M, k, 1) + R(1, 1; k)\,\mu\,(S/M, k, 1)] =$$

$$= \frac{M}{k^{\theta_0} - k^{\theta_1}} \left\{ \left[\left(\frac{S}{M}\right)^{\theta_0} - \left(\frac{S}{M}\right)^{\theta_1} \right] + \right.$$

$$\left. + R(1, 1; k) \left[k^{\theta_0} \left(\frac{S}{M}\right)^{\theta_1} - k^{\theta_1} \left(\frac{S}{M}\right)^{\theta_0} \right] \right\}, \qquad (6.68)$$

где $R(1, 1; k)$ определяется с помощью условия на границе при $S = M$.

Условие исполнения русского опциона может быть получено путем следующих эвристических рассуждений. Если текущая цена акции S очень близка к M, можно быть уверенным «почти наверняка», что цена акции достигнет уровня M (и, следовательно, что максимум будет увеличиваться) до того, как опцион будет исполнен. Таким образом, если S близко к M, функция $R\,(S, M; k)$ не зависит от точного значения M и его производная по M

$$R_M(M, M; k) = 0.$$

Отсюда и из (6.68) мы получаем условие

$$\frac{[((1-\theta_0) - (1-\theta_1)) + R(1, 1; k)(k^{\theta_0}(1-\theta_1) - k^{\theta_1}(1-\theta_0))]}{k^{\theta_0} - k^{\theta_1}} = 0,$$

что дает

$$R(1,\,1;\,k)=\frac{\theta_1-\theta_0}{k^{\theta_1}(1-\theta_0)-k^{\theta_0}(1-\theta_1)}.$$

Подставим это выражение в формулу (6.68) и получим после упрощений следующий результат:

$$R(S,M;k)=M\,\frac{(1-\theta_0)(S/M)^{\theta_1}-(1-\theta_1)(S/M)^{\theta_0}}{k^{\theta_1}(1-\theta_0)-k^{\theta_0}(1-\theta_1)}.$$

Теперь ясно, что оптимальное значение k является значением, которое минимизирует знаменатель, производная которого равна

$$(1-\theta_0)\theta_1 k^{\theta_1-1}+(\theta_1-1)\theta_0 k^{\theta_0-1}.$$

Следовательно, оптимальное значение

$$\tilde{k}=\left(\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right)^{1/(\theta_1-\theta_0)}, \tag{6.69}$$

и цена русского опциона равна

$$\begin{cases} R(S,M;\tilde{k}), & \text{если} \quad \tilde{k}M\le S\le M, \\ M, & \text{если} \quad S\le \tilde{k}M. \end{cases} \tag{6.70}$$

Формулы (6.69) и (6.70) являются эквивалентными формулам, полученным Л. Шеппом и А. Ширяевым.

§ 10. КВАЗИНЕПРЕРЫВНЫЕ ВЫБОРОЧНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Предположим, что выборочные траектории $\{S\,(t)\}$ или, что эквивалентно, $\{X(t)\}$ не имеют скачков вниз (это предположение было использовано при получении цены (6.39)). Тогда имеет место следующая декомпозиция:

$$X(t) = Y(t) + v^2W(t) - ct, \quad t \ge 0. \tag{6.71}$$

Здесь $\{Y(t)\}$ является или составным пуассоновским процессом с положительными приращениями или пределом такого процесса;

$\{W(t)\}$ – стандартный винеровский процесс с нулевым средним и единичной дисперсией за единицу времени; последнее слагаемое ct представляет собой систематический дрейф. Производящая функция семиинвариантов случайной величины $X(t)$ имеет вид

$$\ln[M(z,t)] = t\left(\int_0^\infty (e^{zx}-1)[-dQ(x)] + v^2 z^2/2 - cz\right), \tag{6.72}$$

где $Q(x)$ – неотрицательная и невозрастающая функция с $Q(\infty) = 0$.

Заметим, что для всякого положительного числа ε интеграл

$$\int_\varepsilon^\infty (e^{zx}-1)[-dQ(x)],$$

как функция от z, является производящей функцией семиинвариантов составного распределения Пуассона с пуассоновским параметром

$$\lambda(\varepsilon) = Q(\varepsilon)$$

и распределением величины скачка

$$P(x;\varepsilon) = \frac{Q(\varepsilon) - Q(x)}{Q(\varepsilon)}, \quad x \ge \varepsilon.$$

Для простоты обозначений предположим, что $-Q(x) = q(x)\,dx$ для некоторой неотрицательной функции $q(x)$. Пусть μ и σ^2 обозначают соответственно среднее и дисперсию $\{X(t)\}$ за единицу времени. Тогда

$$\mu t = E[X(t)] = \left(\int_0^\infty xq(x)dx - c\right)t, \tag{6.73}$$

$$\sigma^2 t = \mathrm{var}[X(t)] = \left(\int_0^\infty x^2 q(x)dx + v^2\right)t \tag{6.74}$$

и

$$E[(X(t)-\mu t)^3] = \left(\int_0^\infty x^3 q(x)dx\right)t. \tag{6.75}$$

Вообще для $n \geq 3$ n-й семиинвариант случайной величины $X(t)$ равен

$$\left(\int_0^\infty x^n q(x)dx\right)t.$$

Из формул (6.4) и (6.72) следует, что

$$\ln[M(z, t; h)] = \ln[M(z + h, t)] - \ln[M(h, t)] =$$

$$= t\left(\int_0^\infty (e^{zx} - 1)e^{hx} q(x)dx + v^2 z^2 / 2 - (c - v^2 h)z\right). \tag{6.76}$$

Таким образом, преобразование Эсшера с параметром h процесса, определяемого соотношением (6.71), имеет такой же вид со следующими модификациями:

$$q(x) \to e^{hx} q(x), \tag{6.77}$$

$$v^2 \to v^2 \text{ (остается прежним)}, \; c \to c - v^2 h.$$

Кроме того, из (6.76) следует, что (6.28) и (6.36) можно записать соответственно как

$$\int_0^\infty (e^x - 1)e^{h^* x} q(x)dx + v^2 h^* = c + \delta - \rho - \frac{v^2}{2}$$

и

$$\int_0^\infty (e^{\theta x} - 1)e^{h^* x} q(x)dx + \frac{v^2 \theta^2}{2} - (c - v^2 h^*)\theta = \delta. \tag{6.78}$$

Частный случай

Для модели, определяемой соотношениями (6.1) и (6.71), теперь предположим, что $v = 0$, т. е. $S(t) = S(0)\exp\{Y(t) - ct\}$, и что

$$q(x) = ax^{\alpha - 1}e^{-bx}, \quad x > 0,$$

где $a > 0$, $\alpha > -1$ и $b > 0$ являются параметрами.

В соответствии с модификацией (6.77) для $h < b$ преобразование Эсшера такого процесса является членом этого же семейства с параметром b, замененным на

$$b(h) = b - h.$$

ПФМ случайной величины $Y(t)$ имеет вид

$$\exp\left(t\int_0^\infty (e^{zx}-1)q(x)dx\right) = \exp\left(at\int_0^\infty (e^{zx}-1)x^{\alpha-1}e^{-bx}dx\right) =$$

$$= \begin{cases} \left(\dfrac{b}{b-z}\right)^{at}, & \text{если} \quad \alpha = 0, \\ \exp\left(\dfrac{a\Gamma(\alpha)}{b^\alpha}\left[\left(\dfrac{b}{b-z}\right)^\alpha - 1\right]t\right), & \text{если} \quad \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, для $\alpha = 0$ процесс $\{Y(t)\}_{t\,\geq\,0}$ является гамма-процессом; для $\alpha > 0$ он является составным процессом Пуассона с пуассоновским параметром $\lambda\ (a,\ \alpha,\ b) = a\Gamma(\alpha)\ /\ b^\alpha$ и гамма-плотностью вероятностей величины скачков

$$p\ (x;\alpha, b) = \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-bx},\ x > 0.$$

Для $-1 < \alpha < 0$ наиболее известным случаем является $\alpha = -\,½$, если $\{Y(t)\}_{t\,\geq\,0}$ – обратный гауссов процесс с плотностью вероятностей случайной величины $Y(t)$ вида

$$\frac{at}{x^{3/2}}\exp\left(\frac{-(\sqrt{bx}-\sqrt{\pi}at)^2}{x}\right), \quad x > 0.$$

Для $b^* = b(h^*) = b - h^*$ получаем уравнения

$$\frac{b^*}{b^*-1} = e^{\frac{c+\delta-\rho}{a}}, \text{ если } \alpha = 0, \tag{6.79}$$

и

$$\frac{1}{(b^*-1)^\alpha} - \frac{1}{b^{*\alpha}} = \frac{c+\delta-\rho}{a\Gamma(\alpha)}, \text{ если } \alpha \neq 0. \tag{6.80}$$

Решением уравнения (6.79) является

$$b^* = \frac{1}{1-e^{-(c+\delta-\rho)/a}}, \tag{6.81}$$

что при $\rho = 0$ превращается в формулу (6.15). В общем случае вид уравнения (6.79) не позволяет получить решение для b^* в явной форме. Однако если $\alpha = 1$ (величины скачков распределены экспоненциально), решение имеет вид

$$b^* = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a}{c + \delta - \rho}}\right). \tag{6.82}$$

Случай $\alpha = -\frac{1}{2}$ рассмотрен выше в § 3.

Для каждого фиксированного α можно определить параметры a, b и c методом моментов. Таким образом, можно считать известными μ, σ и третий центральный момент $X(1)$, который удобно записать как $\gamma\sigma^3$ (γ является коэффициентом асимметрии). Эти три момента можно записать с помощью формул (6.73) – (6.75) в форме следующих равенств

$$\mu = \int_0^\infty xq(x)dx - c = \frac{a\Gamma(\alpha+1)}{b^{\alpha+1}} - c, \quad \sigma^2 = \int_0^\infty x^2 q(x)dx = \frac{a\Gamma(\alpha+2)}{b^{\alpha+2}},$$

и

$$\gamma\sigma^3 = \int_0^\infty x^3 q(x)dx = \frac{a\Gamma(\alpha+3)}{b^{\alpha+3}}.$$

Из этих равенств получим $b = (\alpha + 2)/\gamma\sigma$ (при определении стоимости финансовой производной это b нужно заменить на b^*)

$$a = \frac{(\alpha+2)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)\gamma^{\alpha+2}\sigma^{\alpha}} \tag{6.83}$$

и

$$c = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}\frac{\sigma}{\gamma} - \mu. \tag{6.84}$$

Формулы для отрицательных корней уравнения (6.78)

При предположениях $\nu = 0$ и $q(x) = ax^{\alpha-1}e^{-bx}$, $x > 0$, уравнение (6.78) превращается в следующее:

$$a\int_0^\infty (e^{\theta x} - 1)e^{h^* x}x^{\alpha-1}e^{-bx}dx - c\theta = \delta$$

или

$$\int_0^{\infty}(e^{\theta x}-1)x^{\alpha-1}e^{-b^* x}dx=\frac{\delta+c\theta}{a}. \qquad (6.85)$$

Явное выражение интеграла в левой части равенства (6.85) можно получить с помощью ПФМ случайной величины $Y(t)$.

Если $\alpha = 0$, то равенство (6.85) приобретает форму

$$\frac{b^*}{b^*-\theta}=e^{\frac{c\theta+\delta}{a}}. \qquad (6.86)$$

Подстановка b^*, полученного из формулы (6.86), в выражение (6.81) приводит к равенству

$$e^{-c\theta/a}+\theta\,[e^{\delta/a}-e^{-(c-\rho)/a}]=e^{\delta/a}.$$

С помощью формул (6.83) и (6.84) получаем

$$\frac{1}{a}=\frac{\gamma^2}{4} \quad \text{и} \quad \frac{c}{a}=\frac{\gamma}{2}\left(\sigma-\frac{\mu\gamma}{2}\right).$$

Если $\alpha \neq 0$ и $\alpha > -1$, то уравнение (6.85) приобретает вид

$$\frac{1}{(b^*-\theta)^{\alpha}}-\frac{1}{b^{*\alpha}}=\frac{\delta+c\theta}{a\Gamma(\alpha)}, \qquad (6.87)$$

где b^* определяется из уравнения (6.80). Уравнение (6.87) упростится при $\alpha = 1$ к виду

$$\frac{1}{b^*-\theta}-\frac{1}{b^*}=\frac{\delta+c\theta}{a}, \qquad (6.88)$$

что является квадратным уравнением относительно θ, а b^* определяется из (6.82),

$$a=\frac{27}{2\gamma^3\sigma} \quad \text{и} \quad c=\frac{3}{2}\frac{\sigma}{\gamma}-\mu.$$

В случае отсутствия дивидендов ($\rho = 0$) положительный корень уравнения (6.88) равен $\theta_1 = 1$, а отрицательный корень выражается в виде $\theta_0 = -\delta\, b^*/c$.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

Artzner P., *Delbaen F.* Term Structure of Interest Rates: The Martingale Approach // Advances in Applied Mathematics. 1989. Vol. 10. P. 95–129.

Black F., *Scholes M.*, The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. 1973. Vol. 81. P. 637– 654.

Cox J. C., Ross S. A. The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes // Journal of Financial Economics. 1976. Vol. 3. P. 145–166.

Gerber H. U., Shiu E.S. Option Pricing by Esscher Transforms // Transactions of Society of Actuaries. 1994. Vol. XLVI. P. 99–191.

Gerber H. U., Shiu E.S. Martingale Approach to Pricing Perpetual American Options // ASTIN Bulletin. 1994. Vol. 24. No. 2. P. 195–220.

Harrison J. M., Kreps D. M. Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets // Journal of Economic Theory. 1979. Vol. 20. P. 381–408.

Harrison J. M., Pliska S. R. Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading // Stochastic Processes and Applications. 1981. Vol. 11. P. 215–260.

Merton R. Theory of Rational Option Pricing // Bell Journal of Economics and Management Science. 1973. Vol. 4. P. 141–183.

Merton R. Continuous-Time Finance. Oxford: Blackwell, 1990.

Дополнительная

Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований: В 2 т. М.: Наука, 1969. Т. 1.

Гирсанов И. В. О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры // Теория вероятностей и ее применения. 1960. Т. 5. № 3. С. 314–330.

Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наук. думка. 1972.

Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука. 1974.

Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука. 1986.

Медведев Г. А. Математические модели финансовых рисков: В 2 ч. Ч. 1: Риски из-за неопределенности процентных ставок. Мн.: БГУ, 1999.

Терпугов А. Ф. Математика рынка ценных бумаг. Томск: Изд-во ТГПУ, 2000.

Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. М.: Мир, 1967. Т. 2.

Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бэйли Дж. В. Инвестиции. М.: Инфра-М, 1997.

Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.

Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики: В 2 т. Т. 1: Факты. Модели. Т. 2: Теория. М.: Фазис, 1998.

Cox J., Ingersoll J., Ross S. A theory of the Term Structure of Interest Rates // Econometrica. 1985. Vol. 53. No. 2. P. 385–407.

Duffie D. Dynamic Asset Pricing. Princeton: Princeton University Press, 1992.

Fama E. F. Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market // Management Science. 1965. Vol. 311. No. 2. P. 409–419.

Ilieva N. G. The Comparative Analysis of the Term Structure Models of the Affine Yield Class // Proceedings of 10-th Intern. AFIR Symposium. Tromsø. 2000. P. 367–393.

Ilieva N. G. On Some Yield Interest Rate Models of the Affine Class Term Structures // EURO Working Group on Financial Modelling. 26-th Meeting. Trondheim. 2000. P. 1–19.

Modigliani F., Miller M. The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment // American Economic Review. 1958. Vol. 48 (June). P. 261–297.

Panjer H., Willmot G. Insurance Risk Models. Schaumburg: Society of Actuaries, 1992.

Samuelson P. A. Rational Theory of warrant Pricing // Industrial Management Review. 1965. Vol. 6. P. 13–31.

ОГЛАВЛЕНИЕ